

Київський університет імені Бориса Грінченка
Факультет інформаційних технологій та математики
Кафедра математики і фізики

«ЗАТВЕРДЖУЮ»

Проректор з науково-методичної
та навчальної роботи
Олексій ЖИЛЬЦОВ
«07» 09 2022 р.



РОБОЧА ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ
ВАРІАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ

для студентів

спеціальності 111 Математика
освітнього рівня першого (бакалаврського)
освітньої програми 111.00.01 Математика



Київ – 2022

Розробники:

10

Самойленко Юлія Іванівна, доктор фізико-математичних наук, старший науковий співробітник, професор кафедри комп'ютерних наук і математики факультету Інформаційних технологій і управління Київського університету імені Бориса Грінченка

Викладачі:

Самойленко Юлія Іванівна, доктор фізико-математичних наук, старший науковий співробітник, професор кафедри комп'ютерних наук і математики факультету Інформаційних технологій і управління Київського університету імені Бориса Грінченка

Робочу програму розглянуто і затверджено на засіданні кафедри комп'ютерних наук і математики

Протокол від 28.08. 2020 р. № 10

Завідувач кафедри О. С. Литвин (О.С. Литвин)

Робочу програму погоджено з гарантом освітньої програми (керівником освітньої програми 111.00.01 Математика

28.08. 2020 р.

Керівник освітньої програми М.М. Астаф'єва (М.М. Астаф'єва)

Робочу програму перевірено

_____. 20__ р.

Заступник директора/декана І.Ю. Мельник (І.Ю. Мельник)

Пролонговано:

на 2021/2022 н.р. О. С. Литвин (Литвин О.С.), «26» 08 2021 р., протокол № 10

на 2022/2023 н.р. О. С. Литвин (Литвин О.С.), «04» 08 2022 р., протокол № 10

на 20__/20__ н.р. _____, «____» ____ 20__ р., протокол № ____

на 20__/20__ н.р. _____, «____» ____ 20__ р., протокол № ____

Варіаційне числення

Опис навчальної дисципліни

Найменування показників	Характеристика дисципліни за формами навчання
	денна
Вид дисципліни	вибіркова
Мова викладання, навчання та оцінювання	українська
Загальний обсяг кредитів / годин	4 / 120 год
Курс	4
Семестр	7
Кількість змістових модулів з розподілом:	4
Обсяг кредитів	4
Обсяг годин, в тому числі:	
Аудиторні	56 год.
Модульний контроль	8 год.
Самостійна робота	56 год.
Форма семестрового контролю	залік

2. Мета та завдання навчальної дисципліни

Робоча навчальна програма з курсу «Варіаційне числення» є нормативним документом Київського університету імені Бориса Грінченка, який розроблено кафедрою інформаційних технологій і математики на основі освітньо-професійної програми підготовки здобувачів першого (бакалаврського) рівня відповідно до навчального плану спеціальності 111 Математика, освітньої програми 111.00.01 Математика.

Робочу навчальну програму укладено згідно з вимогами Європейської кредитної трансферно-накопичувальної системи (ЄКТС) організації навчання.

Програма визначає обсяги знань, якими повинен опанувати здобувач першого (бакалаврського) рівня відповідно до вимог освітньо-кваліфікаційної характеристики, алгоритму вивчення навчального матеріалу дисципліни «Математика» та необхідне методичне забезпечення, складові і технологію оцінювання навчальних досягнень студентів.

Навчальна дисципліна «Варіаційне числення» складається з чотирьох змістових модулів: Екстремуми функцій однієї та багатьох змінних, Необхідні умови існування екстремумів для задач із фіксованими межами, Задачі варіаційного числення на множині функцій із рухомими межами, Достатні умови існування локальних екстремумів. Обсяг дисципліни – 120 год (4 кредити).

Метою викладання навчальної дисципліни «Варіаційне числення» є формування у студентів знань, вмінь і навичок щодо застосувань теоретичних основ варіаційного числення у професійній діяльності, зокрема, в освітній галузі, а також при розв’язуванні задач практики, які виникають у різних галузях природознавства, зокрема, у фізиці, біології, тощо.

Завдання отримання базових знань з варіаційного числення, серед яких поняття екстремальної задачі, сильного та слабого екстремумів, найпростішої задачі варіаційного числення, задачі Больца, ізопериметричної задачі, функції Вейерштрасса та набуття наступних компетентностей:

Загальні компетентності

ЗК-1: Розуміння поставленої задачі; здатність проникати в суть явища, проблеми, завдання, виявляти характерні ознаки, суттєві риси та взаємозв’язки, проводити аналогії, узагальнювати; володіння системним, цілісним підходом до аналізу й оцінки ситуації та вирішення проблеми

ЗК-3: Креативність. Відкритість до нових знань, ідей і технологій; здатність продукувати нестандартні ідеї, підходи, відхилятися від традиційних схем рішення проблем; здатність до новаторської діяльності

ЗК-5: Координація дій з іншими фахівцями. Здатність та готовність виконувати колективні проекти, брати на себе відповідальність за виконання робіт окремої групи; уміння вести дискусію, аргументовано відстоюючи свою точку зору; здатність доносити власні знання, обґрунтування і висновки до фахівців і широкого загалу;

ЗК-8: Когнітивна гнучкість. Здатність здобувати нові знання, уміння та інтегрувати їх з уже наявними; самостійного освоєння нових методів дослідження, зміни наукового й виробничого профілю своєї діяльності.

ЗК-10: Складання суджень і ухвалення рішень. Спроможність орієнтуватися у різних поглядах на проблему, формувати власну думку; уміти формулювати задачу, аргументовано обирати оптимальні шляхи розв'язання, аналізувати й осмислювати отриманий розв'язок.

Фахові компетентності

ФК-1: Фундаментальні знання обов'язкових навчальних дисциплін, включаючи обізнаність із окремими сучасними досягненнями, критичне осмислення основних теорій, принципів, методів і понять.

ФК-2: Здатність проводити міркування, дотримуючись законів та правил математичної логіки.

ФК-3: Здатність проводити математичні доведення на базі аксіоматичного підходу, спроможність відрізняти правдоподібні аргументи від формально бездоганих.

ФК-9: Навички обчислень, зокрема усних, тотожних перетворень виразів, вибору раціональних методів і способів обчислень, перетворень, ефективне використання технічних засобів; здатність пояснювати в математичних термінах результати, отримані під час розрахунків.

Здатність застосовувати математичні факти, теореми, методи й алгоритми, пакети програмного забезпечення до розв'язування прикладних задач із різних сфер життєдіяльності людини й суспільства чи галузей науки: фізики, інформатики, економіки тощо; зокрема, спроможність виражати терміни специфічної предметної області мовою математики, розробляти математичну модель ситуації з реального світу та переносити математичні знання у нематематичні контексти; спроможність формулювати задачі оптимізації і прийняття рішень та інтерпретувати їхні розв'язки в оригінальному контексті цих задач; спроможність перевіряти математичну модель на адекватність емпіричним даним.

3. Результати навчання за дисципліною

У результаті вивчення навчальної дисципліни студент повинен

знати:

- поняття першої та другої варіації функціоналів, сильного та слабого екстремумів, необхідні умови існування екстремумів функціоналів, поняття екстремалі ;
- рівняння Ейлера для визначення екстремалей, поняття першої варіаційної задачі на множині функцій із фіксованими межами та алгоритм її дослідження властивості;
- задачу Больца на множині функцій із фіксованими межами, необхідні умови існування екстремуму для задачі Больца, умови трансверсальності;
- задачі Лагранжа і Больца на множині функцій із вільними межами, необхідні умови існування їх розв'язків,
- задачі Лагранжа і Больца на множині функцій із рухомими межами, необхідні умови існування їх розв'язків, ізопериметричну задачу та метод множників Лагранжа для її розв'язання;

- достатні умови існування екстремуму для першої варіаційної задачі другого порядку, зокрема, умову Лежандра, поняття спряженої задачі варіаційного числення, умову Якобі та достатні умови існування локального екстремуму;
- поняття голкових варіацій (варіацій Вейерштрасса), функції Вейерштрасса та умови Вейерштрасса для існування сильних екстремумів першої варіаційної задачі, необхідні і достатні умови існування сильних екстремумів.

вміти:

- досліджувати першу варіаційну задачу на слабкий локальний екстремум: знаходити відповідні допустимі екстремалі із необхідних умов існування локальних екстремумів та доводити, що на знайденій екстремалі досягається локальний екстремум або показувати, що розглядувана задача не має розв'язків;
- досліджувати задачу Больца: знаходити відповідні допустимі екстремалі із необхідних умов існування локальних екстремумів із використанням рівняння Ейлера та умов трансверсальності та доводити, що на знайденій екстремалі досягається локальний екстремум або показувати, що розглядувана задача не має розв'язків;
- досліджувати задачу Лагранжа і Больца на множині функцій із вільними межами та доводити, що на знайдених екстремалях досягається локальний екстремум або показувати, що розглядувана задача не має розв'язків;
- досліджувати задачі Лагранжа на множині функцій із рухомими межами із використанням необхідних умов існування їх розв'язків;
- за допомогою методу множників Лагранжа досліджувати задачу Больца на множині функцій із рухомими межами та ізопериметричну задачу;
- застосовувати достатні умови другого порядку для дослідження існування локальних слабких екстремумів;
- за допомогою функції Вейерштрасса досліджувати задачі про існування сильних локальних екстремумів.

4. Структура навчальної дисципліни

Назви змістових модулів і тем	Кількість годин						
	денна форма						
	у тому числі						
	Ус бог о	л.	лаб.	м.к.	інд.	с.р.	кон с.
Модуль 1							
Змістовий модуль 1. Екстремуми функцій однієї та багатьох змінних							
Тема 1. Математичні моделі оптимізаційних задач. Необхідні та достатні умови вищих порядків для існування локальних екстремумів	11	2	2	-	-	7	0.5
Тема 2. Задачі з обмеженнями. Принцип Лагранжа для функцій багатьох змінних	13	2	4	-	-	7	0.5
Разом за змістовим модулем 1	24	4	6	2	-	14	1
Модуль 2							
Змістовий модуль 2. Необхідні умови існування екстремумів для задач із фіксованими межами							
Тема 3. Перша варіація функціоналу. Сильний та слабкий екстремум. Необхідна умова існування екстремуму	9	2	4	-	-	4	0.5
Тема 4. Задача Лагранжа та задача Больца. Необхідні умови існування екстремумів. Рівняння Ейлера	10	2	4	-	-	4	1
Тема 5. Задачі варіаційного числення для функціоналів, що містять старші похідні. Рівняння Ейлера-Пуассона	12	2	4	-	-	6	0.5
Разом за змістовим модулем 2	31	6	12	2	-	14	2

Модуль 3							
Змістовий модуль 3. Задачі варіаційного числення на множині функцій із рухомими межами							
Тема 6. Задача Лагранжа та задача Больца на множині функцій із вільними межами	6	2	2	-	-	2	1
Тема 7. Задача Лагранжа та задача Больца на множині функцій із рухомими межами. Умови існування локальних екстремумів	12	2	4	-	-	6	1
Тема 8. Ізопериметрична задача та її функція Лагранжа	10	2	4			4	1
Разом за змістовим модулем 3	28	6	10	2	-	12	3
Модуль 4. Достатні умови існування локальних екстремумів							
Тема 9. Друга варіація функціоналів, спряжена задача. Достатні умови існування слабкого екстремуму для задачі Лагранжа	14	2	4	-	-	8	0.5
Тема 10. Достатні умови існування сильного екстремуму, функція Вейерштрасса	14	2	4	-	-	8	0.5
Разом за змістовим модулем 4	28	4	8	2	-	16	1
Семестровий контроль	2	-	-	-	-	-	-
Усього годин	129	20	36	8	-	56	7

5. Програма навчальної дисципліни

Змістовий модуль 1. Екстремуми функцій однієї та багатьох змінних

Тема 1. Математичні моделі оптимізаційних задач. Необхідні та достатні умови вищих порядків для існування локальних екстремумів.

Приклади оптимізаційних задач: задача Герона, задача логістики, задача про брахістохрону. Достатні умови вищих порядків для існування екстремумів функцій багатьох змінних.

Тема 2. Задачі з обмеженнями. Принцип Лагранжа для функцій багатьох змінних

Задачі з обмеженнями-рівностями та обмеженнями-нерівностями для функцій багатьох змінних. Достатні умови існування екстремумів. Конус допустимих значень. Принцип множників Лагранжа.

Змістовий модуль 2. Необхідні умови існування екстремумів для задач із фіксованими межами.

Тема 3. Перша варіація функціоналу. Сильний та слабкий екстремум. Необхідна умова існування екстремуму.

Поняття функціонала, перша варіація функціоналу, основна лема варіаційного числення. Сильний та слабкий екстремуми функціоналу. Необхідні умови екстремуму функціоналу.

Тема 4. Задача Лагранжа та задача Больца. Необхідні умови існування екстремумів. Рівняння Ейлера.

Найпростіша задача варіаційного числення (задача Лагранжа) на множині функцій із фіксованими межами. Необхідна умова існування слабкого екстремуму, рівняння Ейлера. Поняття допустимої множини, екстремалі, допустимої екстремалі. Задача Больца. Необхідні умови існування розв'язку задачі Больца, умови трансверсальності.

Тема 5. Задачі варіаційного числення для функціоналів, що містять старші похідні. Рівняння Ейлера-Пуассона

Задача Лагранжа на множині функцій із фіксованими межами для випадку, коли відповідний функціонал містить старші похідні. Необхідні умови існування слабкого екстремуму, рівняння Ейлера—Пуассона.

Змістовий модуль 3. Задачі варіаційного числення на множині функцій із рухомими межами

Тема 6. Задача Лагранжа та задача Больца на множині функцій із вільними межами.

Постановка задачі Лагранжа та задача Больца на множині функцій із вільними межами. Необхідні умови існування локальних екстремумів. Умови стаціонарності.

Тема 7. Задача Лагранжа та задача Больца на множині функцій із рухомими межами. Умови існування локальних екстремумів.

Постановка задачі Лагранжа на множині функцій із рухомими межами. Необхідні умови існування екстремумів, умова трансверсальності. Задача Больца на множині функцій із рухомими межами. Функція Лагранжа, необхідні умови існування локальних екстремумів для задачі Больца.

Тема 8. Ізопериметрична задача та її функція Лагранжа.

Постановка ізопериметричної задачі. Задача Дідони. Функція Лагранжа, необхідні умови існування локальних екстремумів. Алгоритм дослідження ізопериметричної задачі.

Змістовий модуль 4. Достатні умови існування локальних екстремумів.

Тема 9. Друга варіація функціоналів, спряжена задача. Достатні умови існування слабкого екстремуму для задачі Лагранжа.

Друга варіація функціоналу. Умова Лежандра, посилена умова Лежандра. Спряжена задача варіаційного числення, рівняння Якобі та умова Якобі. Достатні умови слабкого екстремуму для задачі Лагранжа.

Тема 10. Достатні умови існування сильного екстремуму, функція Вейерштрасса. Голкові варіації при дослідженні на сильний екстремум. Функція Вейерштрасса та умова Вейерштрасса. Необхідні умови існування сильного екстремуму в термінах функції Вейерштрасса. Достатні умови існування сильного екстремуму для задачі Лагранжа.

Теми лабораторних занять

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
Змістовий модуль 1. Екстремуми функцій однієї та багатьох змінних		
1.	Побудова математичних моделей оптимізаційних задач та їх дослідження за допомогою необхідних та достатніх умови вищих порядків для існування локальних екстремумів	2
2.	Дослідження на екстремум задачі з обмеженнями типу рівності та нерівності за допомогою принципу Лагранжа для функцій багатьох змінних	4
Змістовий модуль 2. Необхідні умови існування екстремумів для задач із фіксованими межами		
3.	Дослідження функціоналів на лінійність та обмеженість. Обчислення першої варіації функціоналу	4
4.	Дослідження на локальний екстремум задачі Лагранжа: знаходження рівняння Ейлера та допустимих екстремалей, Розв'язування задачі Больца: знаходження розв'язків рівняння Ейлера, що задовольняють умови трансверсальності.	4
5.	Дослідження задач Лагранжа для функціоналів, що містять старші похідні. Знаходження екстремалей із рівнянь Ейлера-Пуассона	4
Змістовий модуль 3. Задачі варіаційного числення на множині функцій із рухомими межами		
6.	Розв'язування задачі Лагранжа та задачі Больца на множині функцій із вільними межами. Застосування необхідних умов існування локальних екстремумів та умови стаціонарності	2
7.	Дослідження задачі Лагранжа на множині функцій із рухомими межами. Побудова екстремалей із використанням умови трансверсальності. Застосування функції Лагранжа для дослідження локальних екстремумів для задачі Больца на множині функцій із рухомими межами.	4

8.	Постановка ізопериметричної задачі. Застосування функції Лагранжа для дослідження локальних екстремумів. Алгоритм дослідження ізопериметричної задачі.	4
Змістовий модуль 4. Достатні умови існування локальних екстремумів		
9.	Застосування другої варіації функціоналу для дослідження слабкого екстремуму для задачі Лагранжа.	4
10.	Побудова функції Вейєрштрасса та її застосування до дослідження існування сильного екстремуму для задачі Лагранжа	4
	Разом за 1-й семестр	36
	Разом	36

6. Контроль навчальних досягнень

6.1. Система оцінювання навчальних досягнень студентів

Навчальні досягнення студентів з дисципліни оцінюються за модульно-рейтинговою системою, в основу якої покладено принцип поетапної звітності, обов'язковості модульного контролю, накопичувальної системи оцінювання рівня знань, умінь та навичок, розширення кількості підсумкових балів до 100.

Оцінка за кожний змістовий модуль включає бали за поточну роботу студента на практичних заняттях, за виконання індивідуальних завдань, за модульну контрольну роботу. Виконання модульних контрольних робіт здійснюється у письмовому вигляді з використанням завдань у електронному або роздрукованому вигляді. Модульний контроль знань студентів здійснюється після завершення вивчення навчального матеріалу змістового модуля.

У процесі оцінювання навчальних досягнень студентів застосовуються такі методи:

- *Методи усного контролю:* індивідуальне опитування, фронтальне опитування, співбесіда, залік.
- *Методи письмового контролю:* модульне письмове тестування; підсумкове письмове тестування, реферат.
- *Методи самоконтролю:* уміння самостійно оцінювати свої знання, самоаналіз.

Кількість балів за роботу з теоретичним матеріалом, на практичних заняттях, під час виконання самостійної роботи залежить від дотримання таких вимог:

- систематичність відвідування занять;
- своєчасність виконання навчальних завдань;
- повний обсяг їх виконання;
- якість виконання навчальних і індивідуальних завдань;
- самостійність виконання;
- творчий підхід у виконанні завдань;
- ініціативність у навчальній діяльності;
- виконання тестових завдань.

Розрахунок рейтингових балів за видами поточного (модульного) контролю

№ з/п	Вид діяльності студента	Макс. кількість балів за одиницю	Модуль 1		Модуль 2		Модуль 3		Модуль 4	
			Кільк. одиниць до розрахунку	Макс. кількість балів за вид	Кільк. одиниць до розрахунку	Макс. кількість балів за вид	Кільк. одиниць до розрахунку	Макс. кількість балів за вид	Кільк. одиниць до розрахунку	Макс. кількість балів за вид
1	Відвідування лекцій	1	2	2	3	3	3	3	2	2

2	Відвідування лабораторних занять	1		3	6	6	5	5	4	4
3	Робота на лабораторних (семінарських) заняттях	10	3	30	6	60	5	50	4	40
4	Виконання модульної контрольної роботи	25	1	25	1	25	1	25	1	25
5.	Самостійна робота	5	1	5	1	5	1	5	1	5
	Макс. кількість балів за видами поточного контролю (МВ)	-	-	65	-	99	-	88	-	76
	Розрахунок коефіцієнта	100:398=0,3								

6.2. Самостійна робота та критерії її оцінювання

№ з/п	Назва теми	Кількість годин	Бали
Змістовий модуль 1. Екстремуми функцій однієї та багатьох змінних		14	5
1	Побудова математичних моделей оптимізаційних задач: задача про брахістохрону, задача Дідони та їх дослідження	7	2
2	Задачі з обмеженнями-рівностями та обмеженнями-нерівностями для функцій багатьох змінних	7	3
Змістовий модуль 2. Необхідні умови існування екстремумів для задач із фіксованими межами		14	5
3	Вивчення властивостей функціоналів, норма функціоналу	4	5
4	Дослідження на локальний екстремум задач Лагранжа та задач Больца для деяких узагальнених задач	4	
5	Дослідження на локальний екстремум задач Лагранжа та задач Больца за наявності старших похідних для деяких узагальнених задач	6	
Змістовий модуль 3. Задачі варіаційного числення на множині функцій із рухомими межами		12	5
6	Розв'язування задач Лагранжа та задач Больца на множині функцій із вільними межами для випадку вектор-функцій	2	2
7	Геодезичні відстані, геодезичні кола та геодезичний еліпс. Модель Пуанкаре для геометрії Лобачевського на площині	6	2
8	Приклади ізопериметричних задач: задача про положення рівноваги однорідної нитки під дією сили тяжіння, задача Кельвіна, задача Дідони у параметричній формі	4	1
Змістовий модуль 4. Достатні умови існування локальних екстремумів		16	5
9	Необхідні й достатні умови слабкого екстремуму функціонала, що залежить від вектор-функцій	8	2
10	Умови екстремуму другого порядку в задачах зі старшими похідними	8	3
Разом		56	20

6.3. Шкала відповідності оцінок

Рейтингова оцінка	Оцінка за стобальною шкалою	Значення оцінки
A	90-100	Відмінно – відмінний рівень знань (умінь) в межах обов'язкового матеріалу з, можливими, незначними недоліками

B	82-89	Дуже добре – достатньо високий рівень знань (умінь) в межах обов’язкового матеріалу без суттєвих (грубих) помилок
C	75-81	Добре – в цілому добрий рівень знань (умінь) з незначною кількістю помилок
D	69-74	Задовільно – посередній рівень знань (умінь) із значною кількістю недоліків, достатній для подальшого навчання або професійної діяльності
E	60-68	Достатньо – мінімально можливий допустимий рівень знань (умінь)
FX	35-59	Незадовільно з можливістю повторного складання - незадовільний рівень знань, з можливістю повторного перескладання за умови належного самостійного доопрацювання
F	1-34	Незадовільно з обов’язковим повторним вивченням курсу – досить низький рівень знань (умінь), що вимагає повторного вивчення дисципліни

7. Навчально-методична карта дисципліни

Всього 120 год., із них: лекції – 20 год., лабораторні заняття – 36 год., модульний контроль – 8 год.,
самостійна робота – 56 год.,

Модулі (назви, бали)	1. Екстремуми функцій однієї та багатьох змінних (47 балів)		2. Необхідні умови існування екстремумів для задач із фіксованими межами (63 бали)			3. Задачі варіаційного числення на множині функцій із рухомими межами (58 балів)			4. Достатні умови існування локальних екстремумів (52 бали)	
Теми	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
Лекції (теми, бали)	1. Математичні моделі оптимізаційних задач. Необхідні та достатні умови вищих порядків для існування локальних екстремумів (1 бал).	2. Задачі з обмеженнями. Принцип Лагранжа для функцій багатьох змінних ((1 бал)	3. Перша варіація функціоналу. Сильний та слабкий екстремум. Необхідна умова існування (1 бал)	4. Задача Лагранжа та задача Больца. Необхідні умови існування екстремумів. Рівняння Ейлера (1 бал)	5. Задачі варіаційного числення для функціоналів, що містять старші похідні. Рівняння Ейлера-Пуассона (1 бал)	6. Задача Лагранжа та задача Больца на множині функцій із вільними межами (1 бал)	7. Задача Лагранжа та задача Больца на множині функцій із рухомими межами. Умови існування локальних екстремумів (1 бал)	8. Ізопериметрична задача та її функція Лагранжа (1 бал)	9. Друга варіація функціоналів, спряжена задача. Достатні умови існування слабого екстремуму для задачі Лагранжа (1 бал)	10. Достатні умови існування сильного екстремуму, функція Вейерштрасса (1 бал)
Лабораторні заняття (теми, бали)	1. Побудова математичних моделей оптимізаційних задач та їх дослідження за допомогою необхідних та достатніх умов вищих порядків для існування локальних екстремумів (11 балів)	2. Дослідження на екстремум задачі з обмеженнями типу рівності та нерівності за допомогою принципу Лагранжа для функцій багатьох змінних (22 бали)	3. Дослідження функціоналів на лінійність та обмеженість. Обчислення першої варіації функціоналу (22 бали)	4. Дослідження на локальний екстремум задачі Лагранжа: знаходження рівняння Ейлера та допустимих екстремалей, розв'язування задачі Больца: знаходження розв'язків рівняння Ейлера, що задовольняють умови трансверсальності. (22 бали)	5. Дослідження задач Лагранжа для функціоналів, що містять старші похідні. Знаходження екстремалей із рівнянь Ейлера-Пуассона (22 бали)	6. Розв'язування задачі Лагранжа та задачі Больца на множині функцій із вільними межами. Застосування необхідних умов існування локальних екстремумів та умов стаціонарності (11 балів)	7. Дослідження задачі Лагранжа на множині функцій із рухомими межами. Побудова екстремалей із використанням умови трансверсальності. Застосування функції Лагранжа для дослідження локальних екстремумів для задачі Больца на множині функцій із рухомими межами. (22 бали)	8. Постановка ізопериметричної задачі. Застосування функції Лагранжа для дослідження локальних екстремумів. Алгоритм дослідження ізопериметричної задачі (22 бали)	9. Застосування другої варіації функціоналу для дослідження слабого екстремуму для задачі Лагранжа. (22 бали)	10. Побудова функції Вейерштрасса та її застосування до дослідження існування сильного екстремуму для задачі Лагранжа (22 бали)
Самостійна робота	Самостійна робота (5 балів)		Самостійна робота (5 балів)			Самостійна робота (5 балів)			Самостійна робота (5 балів)	

Поточний контроль (вид, бали)	Модульна контрольна робота 1 (25 балів)	Модульна контрольна робота 2 (25 балів)	Модульна контрольна робота 3 (25 балів)	Модульна контрольна робота 4 (25 балів)
Підсумковий контроль (вид, бали)	Залік			

8. Рекомендована література

Базова

1. Моклячук М.П. Варіаційне числення. Екстремальні задачі. Підручник. – К. : Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2009. – 380 с.
2. Перестюк М.О., Станжицький О.М., Капустян О.В., Ловейкін Ю.В. Варіаційне числення та методи оптимізації. – К. : Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2010. – 121 с.
3. Ващук Ф.Г., Лавер О.Г., Шумило Н.Я. Математичне програмування та елементи варіаційного числення : Навчальний посібник. – К. : Знання, 2008. – 368 с.

Додаткова

1. Березанський Ю. М., Ус Г. Ф., Шефтель З. Г. Функціональний аналіз. – Львів: Видавець І.Е. Чижиков, 2014. – 559 с.
2. Клименко М.І., Панасенко Є.В., Ткаченко І.Г. Варіаційне числення та методи оптимізації : Навчальний посібник для студентів освітньо-кваліфікаційного рівня «Бакалавр» напряму підготовки «Математика». –