

Київський університет імені Бориса Грінченка
Факультет інформаційних технологій та математики
Кафедра математики і фізики



«ЗАТВЕРДЖУЮ»
Проректор з науково-методичної
та навчальної роботи
Олексій ЖИЛЬЦОВ
« 01 » 09 2022 р.

РОБОЧА ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

АЛГЕБРА І ТЕОРІЯ ЧИСЕЛ

для студентів

спеціальності	111 Математика
освітнього рівня	перший (бакалаврський)
освітньої програми	111.00.01 Математика



Київ – 2022

Розробники:

Радченко Сергій Петрович, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри комп'ютерних наук і математики Факультету інформаційних технологій та управління Київського університету імені Бориса Грінченка.

Викладачі:

Радченко Сергій Петрович, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри комп'ютерних наук і математики Факультету інформаційних технологій та управління Київського університету імені Бориса Грінченка.

Робочу програму розглянуто і затверджено на засіданні кафедри (циклової комісії) комп'ютерних наук і математики

Протокол від 26.08.2021 р. № 10

Завідувач кафедри О.С. Литвин (О.С. Литвин)
(підпис)

Робочу програму погоджено з гарантом освітньої програми (керівником освітньої програми 111.00.01 Математика)
(назва освітньої програми)

26.08.2021 р.

Керівник освітньої програми М.М. Астаф'єва (М.М. Астаф'єва)
(підпис)

Робочу програму перевірено

 . . 20 р.

Заступник директора/декана І.Ю. Мельник (І.Ю. Мельник)
(підпис)

Пролонговано:

на 2022/2023 н.р. О.С. Литвин (ПІБ), «04» 08 2022 р., протокол № 10
(підпис) (ПІБ)

на 20 /20 н.р. (ПІБ), « » 20 р., протокол №
(підпис) (ПІБ)

на 20 /20 н.р. (ПІБ), « » 20 р., протокол №
(підпис) (ПІБ)

на 20 /20 н.р. (ПІБ), « » 20 р., протокол №
(підпис) (ПІБ)

Опис навчальної дисципліни

Найменування показників	Характеристика дисципліни за формами навчання	
	денна	заочна
Вид дисципліни	обов'язкова	
Загальний обсяг кредитів / годин	5/150	
Курс	2	
Семестр	3	
Кількість змістових модулів з розподілом:	3	
Обсяг кредитів	5	
Обсяг годин, в тому числі:	150	
Аудиторні	70	
Модульний контроль	10	
Семестровий контроль	30	
Самостійна робота	40	
Форма семестрового контролю	іспит	

1. Мета та завдання навчальної дисципліни

Мета – ознайомити студентів з фундаментальними поняттями алгебри теорії чисел.

Завдання:

- Вивчення методів розв'язання завдань з алгебри теорії чисел.
- Формування навичок роботи з числовими системами для використання у різних задачах.
- Дослідження властивостей алгебраїчних структур методами теорії множин на базі аксіоматичного підходу.

Завдання полягає у формуванні теоретичних знань та практичних умінь у сфері алгебраїчних досліджень, використання отриманих знань у застосуваннях та набуття наступних компетентностей:

Загальні компетентності

- ЗК-1:** Здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу
- ЗК-2:** Здатність застосовувати знання у практичних ситуаціях
- ЗК-3:** Знання й розуміння предметної області та професійної діяльності
- ЗК-4:** Здатність спілкуватися державною мовою як усно, так і письмово

- ЗК-7:** Здатність учитися і оволодівати сучасними знаннями
ЗК-8: Здатність до пошуку, обробки та аналізу інформації з різних джерел
ЗК-9: Здатність приймати обґрунтовані рішення
ЗК-10: Здатність працювати в команді
ЗК-12: Здатність працювати автономно
ЗК-13: Визначеність і наполегливість щодо поставлених завдань і взятих обов'язків

Спеціальні (фахові) компетентності

- СК-1:** Здатність формувати проблеми математично та в символній формі з метою спрощення їхнього аналізу й розв'язання.
СК-2: Здатність подавати математичні міркування та висновки з них у формі, придатній для цільової аудиторії, а також аналізувати та обговорювати математичні міркування інших осіб, залучених до розв'язання тієї самої задачі.
СК-3: Здатність здійснювати міркування та виокремлювати ланцюжки міркувань у математичних доведеннях на базі аксіоматичного підходу, а також розташовувати їх у логічну послідовність, у тому числі відрізняти основні ідеї від деталей і технічних викладок.
СК-4: Здатність конструювати формальні доведення з аксіом та постулатів і відрізняти правдоподібні аргументи від формально бездоганих
СК-5: Здатність до кількісного мислення
СК-6: Здатність розробляти і досліджувати математичні моделі явищ, процесів та систем
СК-8: Здатність до аналізу математичних структур, у тому числі до оцінювання обґрунтованості й ефективності використовуваних математичних підходів
СК-11: Здатність застосовувати математичні факти, теореми, методи й алгоритми, пакети програмного забезпечення до розв'язування прикладних задач із різних сфер життєдіяльності людини й суспільства.

2. Результати навчання за дисципліною

У результаті вивчення навчальної дисципліни студент повинен

знати:

- основні поняття і визначення алгебри та теорії чисел;
- принципи побудови алгебраїчних структур;
- класифікацію типів алгебраїчних структур та їх властивостей;
- властивості алгебраїчних операцій в різноманітних алгебраїчних структурах та множинах;

- основні теореми про властивості груп;

вміти:

- досліджувати властивості скінченних та нескінченних груп;
- розв'язувати вправи з поліномами та їх застосуваннями;
- досліджувати властивості групових операцій на конкретних носіях;
- встановлювати гомоморфні та ізоморфні відображення групових структур;
- обчислювати найбільший спільний дільник чисел та поліномів;
- виконувати алгебраїчні операції з комплексними числами;

та досягти наступних **програмних результатів навчання:**

РН-1: Знати основні етапи історичного розвитку математичних знань і парадигм, розуміти сучасні тенденції в математиці.

РН-3: Знати принципи *modus ponens* (правило виведення логічних висловлювань) та *modus tollens* (доведення від супротивного) і використовувати умови, формулювання, висновки, доведення та наслідки математичних тверджень.

РН-4: Розуміти фундаментальну математику на рівні, необхідному для досягнення інших вимог освітньої програми.

РН-7: Пояснювати математичні концепції мовою, зрозумілою для нефахівців у галузі математики.

РН-8: Здійснювати професійну письмову й усну комунікацію українською мовою та однією з іноземних мов

РН-10: Розв'язувати задачі придатними математичними методами, перевіряти умови виконання математичних тверджень, коректно переносити умови та твердження на нові класи об'єктів, знаходити й аналізувати відповідності між поставленою задачею й відомими моделями

РН-11: Розв'язувати конкретні математичні задачі, які сформульовано у формалізованому вигляді; здійснювати базові перетворення математичних моделей

РН-15: Знати теоретичні основи і застосовувати алгебраїчні методи для вивчення математичних структур

РН-21: Розв'язувати типові задачі алгебри і теорії чисел.

3. Структура навчальної дисципліни

Тематичний план для денної форми навчання

Назви змістових модулів і тем	Розподіл годин між видами робіт				
	Ус ьог о	Аудиторна:			
		л.	пр.	м.к.	
Модуль 1					
Змістовий модуль 1. Множини натуральних, цілих та раціональних чисел					
Тема 1. Множини натуральних, цілих та раціональних чисел.	13	4	4		5
Тема 2. Поліноми, подільність поліномів.	15	4	4	2	5
Тема 3. Комплексні числа.	19	4	8	2	5
Разом за змістовим модулем 1	47	12	16	4	15
Змістовий модуль 2. Алгебраїчні структури					
Тема 4. Елементи теорії множин.	13	4	4		5
Тема 5. Алгебри. Групи.	17	6	6	2	5
Тема 6. Відображення груп.	15	4	4	2	5
Разом за змістовим модулем 2	45	14	14	4	15
Змістовий модуль 3. Кільця, поля					
Тема 7. Кільця над числовими множинами.	13	4	2		5
Тема 8. Фактор-кільця та ідеали.	15	4	4	2	5
Разом за змістовим модулем 3	28	8	6	2	10
Семестровий контроль	30				30
Усього годин	150	34	36	10	30+40

4. Програма навчальної дисципліни

Змістовий модуль 1. Множини натуральних, цілих та раціональних чисел.

Тема 1. Множини натуральних, цілих та раціональних чисел.

Поняття множини. Аксиоми Пеано. Аксиоматичне означення методу математичної індукції. Алгебраїчні операції на множині натуральних чисел. Відношення порядку множини натуральних чисел. Класи еквівалентності у множині раціональних чисел. Подільність у множині цілих чисел. Алгоритм Евкліда. Основна теорема арифметики.

Тема 2. Поліноми, подільність поліномів.

Поняття поліному з алгебраїчної точки зору. Зв'язок поняття алгебраїчного поліному над полем дійсних чисел та поліному як функції. Єдиність подання дійсних функцій у вигляді поліномів над полем дійсних чисел.

Означення основних операцій з поліномами. Замкненість операцій з поліномами. Проблема ділення поліномів. Теорема про ділення поліномів з остачею. Алгоритм ділення поліномів з остачею. Поняття єдиності ділення з остачею у множині поліномів. Приклади ділення поліномів з остачею. Перевірка множенням результату ділення поліномів з остачею.

Означення спільного дільника двох поліномів. Означення найбільшого спільного дільника двох поліномів. Узагальнення алгоритму Евкліда знаходження найбільшого спільного дільника цілих чисел на кільце поліномів. Алгоритм знаходження найбільшого спільного дільника двох поліномів (алгоритм Евкліда).

Тема 3. Комплексні числа.

Означення комплексного числа. Множина упорядкованих пар дійсних чисел. Алгебраїчна форма комплексного числа. Еквівалентність множини упорядкованих пар дійсних чисел та множини комплексних чисел, заданих у алгебраїчній формі.

Алгебраїчні операції з комплексними числами. Кільце комплексних чисел. Основні властивості. Спряжені комплексні числа.

Різні форми представлення комплексних чисел. Тригонометрична форма комплексного числа. Обчислення цілих ступенів комплексних чисел. Добування всіх коренів довільного ступеня з комплексного числа. Геометрична інтерпретація комплексного числа. Формула Муавра.

Змістовий модуль 2. Алгебраїчні структури.

Тема 4. Елементи теорії множин.

Множина. Відношення належності. Підмножина. Рівність множин. Про способи задання множин. Універсум. Основні операції з множинами: перетин, об'єднання, різниця, доповнення, симетрична різниця. Порожня множина. Основні властивості операцій з множинами. Алгебра Кантора. Декартів добуток множин.

Тема 5. Алгебри. Групи.

Алгебри. Алгебраїчна операція (внутрішній закон композиції). Основні властивості алгебраїчних операцій. Обернені операції.

Приклади алгебр. Основні властивості алгебраїчних операцій. Закон композиції. Приклади груп. Властивості груп.

Напівгрупи. Моноїди. Групи. Циклічні групи. Розклад групи за підгрупою. Теорема Лагранжа і наслідки з неї.

Тема 6. Відображення груп.

Гомоморфізми груп. Конгруенції. Нормальні підгрупи. Факторгрупи. Теорема про гомоморфізм. Теорема про відповідність груп при епіморфізмі.

Приклади нормальних підгруп. Особливості дослідження нормальних підгруп. Властивості групової операції скінченної групи.

Змістовий модуль 3. Кільця, поля.

Тема 7. Кільця над числовими множинами.

Означення кільця. Приклади числових кілець. Типи кілець. Властивості кілець. Асоціативні кільця. Комутативні кільця. Кільця з одиницею. Дільники нуля. Область цілісності.

Тема 8. Фактор-кільця та ідеали.

Кільця лишків, Теорема Ейлера, мала теорема Ферма. Мультиплікативна група кільця лишків за модулем n . Приклади груп лишків. Основні властивості груп лишків. Ознаки подільності. Порівняння по натуральному модулю. Системи лишків. Повна система лишків.

5. Контроль навчальних досягнень

6.1 Система оцінювання навчальних досягнень студентів

№ з/п	Вид діяльності студента	Макс. кількість балів за одиницю	Модуль 1		Модуль 2		Модуль 3	
			Кільк. одиниць до розрахунку	Макс. кількість балів за вид	Кільк. одиниць до розрахунку	Макс. кількість балів за вид	Кільк. одиниць до розрахунку	Макс. кількість балів за вид
1	Відвідування лекцій	1	6	6	7	7	4	4
2	Відвідування практичних занять	1	8	8	7	7	3	3
3	Виконання завдань для самостійної роботи	5	1	5	1	5	1	5
4	Робота на практичних (семінарських) заняттях	10	8	80	7	70	3	30
5	Виконання модульної контрольної роботи	25	1	25	1	25	1	25
	Разом	-	-	124	-	114	-	67
Максимальна кількість балів: 305								
Розрахунковий коефіцієнт: 0,197								

6.2 Завдання для самостійної роботи та критерії її оцінювання

№ з/п	Назва теми	Кількість годин	Бали
	Змістовий модуль 1. Множини натуральних, цілих та раціональних чисел	15	5
	Зміст завдань	Вид контролю	
1	Доведення методом математичної індукції тотожностей та нерівностей. Доведення подільності чисел та виразів.	Поточний контроль: - опитування на практичних заняттях; - модульна КР.	5 2
2	Ділення поліномів з остачею. Знаходження найбільших спільних дільників поліномів.	Поточний контроль: - опитування на практичних заняттях; - модульна КР.	5 2
3	Знаходження суми, добутку, різниці та частки	Поточний контроль:	5 1

№ з/п	Назва теми		Кількість годин	Бали
	двох комплексних чисел. Степені комплексних чисел. Корені з комплексних чисел.	- опитування на практичних заняттях; - модульна КР.		
Змістовий модуль 2.Алгебраїчні структури			15	5
4	Довести, що множина G з операцією $*$ є групою.	Поточний контроль: - опитування на практичних заняттях; - модульна КР.	5	1
5	Побудова ізоморфізму адитивної групи цілих чисел та мультиплікативної групи додатних раціональних чисел.	Поточний контроль: - опитування на практичних заняттях; - модульна КР.	5	2
6	Побудова сюр'єктивного та ін'єктивного відображення двох множин.	Поточний контроль: - опитування на практичних заняттях; - модульна КР.	5	2
Змістовий модуль 3. Кільця, поля			10	5
7	Дослідити будову заданого кільця.		5	2
8	Побудова фактор-кільця за ідеалом.		5	3
Разом			40	15

Критерії оцінювання самостійної роботи.

Самостійна робота студента виконується під час самопідготовки і має бути ретельно розробленим алгоритмом розв'язання задачі з детальним викладенням результатів. Максимальний бал за виконане завдання студент отримує у разі забезпечення наступних умов:

- 1) Якщо завдання має обчислювальний характер, то результатом виконання вправи може бути число, алгебраїчний вираз або інший математичний об'єкт, який відповідає умовам задачі, тобто є правильною відповіддю.
- 2) Якщо завдання полягає у доведенні якогось факту, то результатом має бути послідовність міркувань, які в сукупності з точки зору логіки можна вважати доведенням.
- 3) Кожне твердження в розв'язанні задачі повинно бути обґрунтованим з обов'язковим посиланням на відповідний теоретичний матеріал.

- 4) Відповідь має бути повною, тобто відповідати на всі питання, які сформульовані в умові.

Приклад (узагальнений) розв'язання алгебраїчної задачі.

Умова. Задані множина елементів G певної природи та операція $*$ у вигляді заданого алгоритму дій.

Завдання. Дослідити вказану в умові пару з точки зору властивостей групи.

Розв'язання. Спочатку перевіримо замкненість алгебраїчної операції. Це означає, що образ відображення декартового добутку заданої множини на себе за допомогою алгебраїчної операції співпадає з самою множиною. Наступний крок – перевірка асоціативності операції. За умови скінченної множини достатньо здійснити перевірку рівності добутків всіх трійок елементів з різним розташуванням дужок. Існування нейтрального елементу зумовлює необхідність знайти цей елемент та перевірити виконання співвідношень: $a * e = e * a = a$, де e – нейтральний елемент, та a – довільний елемент множини. Довести, що кожен елемент множини G має обернений. Зробити висновок: якщо всі умови виконуються, то G – група, якщо ні, то групи немає для даної множини з заданою операцією.

6.3 Форми проведення модульного контролю та критерії оцінювання.

Письмово, макс. оцінка - 25 балів. Оцінка за кожне завдання складається з трьох частин: 1) правильне розуміння постановки задачі та точне формулювання алгоритму її розв'язання з вказуванням його етапів; 2) виконання всіх перетворень з отриманням правильного результату; 3) пояснення всіх дій у процесі розв'язання завдання з обов'язковим посиланням на теоретичні результати.

6.4 Форми проведення семестрового контролю та критерії оцінювання.

Письмово, макс. оцінка - 40 балів, 4 завдання (2 теоретичні + 2 практичні) оцінюються по 10 балів кожне.

Оцінка за кожне практичне завдання складається з трьох частин: 1) правильне розуміння постановки задачі та точне формулювання алгоритму її розв'язання з вказуванням його етапів; 2) виконання всіх перетворень з отриманням правильного результату; 3) пояснення всіх дій у процесі розв'язання завдання з обов'язковим посиланням на теоретичні результати.

Кожне теоретичне завдання оцінюється за такими критеріями: 1) повнота викладення питання; 2) точність формулювань; 3) пояснення суті питання на простих наочних прикладах; 4) обґрунтованість всіх наведених тверджень.

6.5 Орієнтовний перелік питань для семестрового контролю.

Подільність в кільці Z цілих чисел. Властивості. Теорема про ділення з остачею

Найбільший спільний дільник двох цілих чисел. Властивості НСД двох цілих чисел. Алгоритм Евкліда. Теорема про лінійне представлення НСД двох цілих чисел

Взаємно прості числа. Їх властивості. Критерій взаємної простоти двох цілих чисел

Найменше спільне кратне двох цілих чисел. Теорема про обчислення НСК двох цілих чисел

Прості та складені числа. Властивості простих чисел. Теорема Евкліда про нескінченність множини простих чисел

Основна теорема арифметики. Теореми про дільника про НСД і НСК двох цілих чисел, записаних в канонічній формі

Означення конгруенції. Твердження, еквівалентні означенню. Властивості конгруенцій

Класи лишків за модулем. Властивості. Кільце класів лишків

Дільники нуля і дільники одиниці кільця цілих чисел. Мультиплікативна група дільників одиниці

Характеристика кільця з одиницею. Ідеали кільця. Означення, критерій ідеалу. Приклади. Операції над ідеалами.

Класи лишків кільця за ідеалом. Приклади. Властивості

Фактор-кільце. Зв'язок між класами лишків кільця цілих чисел за ідеалом I та класами лишків кільця цілих чисел за модулем m . Гомоморфізми кілець. Властивості. Приклади. Основна теорема про гомоморфізми кілець

Група. Означення, властивості. Приклади. Симетрична група підстановок S_n

Циклічні групи. Порядок елемента. Властивості циклічних груп. Теореми про ізоморфізм циклічних груп. Суміжні класи групи за підгрупою. Теорема Лагранжа та наслідки з неї

Нормальна підгрупа. Приклади. Критерій нормальної підгрупи. Властивості

Фактор-група групи за нормальною підгрупою

Означення та властивості гомоморфізму груп. Ядро гомоморфізму двох груп.

6.6 Шкала відповідності оцінок

Оцінка	Кількість балів
Відмінно	100-90
Дуже добре	82-89
Добре	75-81
Задовільно	69-74
Достатньо	60-68
Незадовільно	0-59

6. Навчально-методична картка дисципліни

Модулі (назви, бали)	1. Множини натуральних, цілих та раціональних чисел(124 бали)			2. Алгебраїчні структури(114 балів)			3. Кільця, поля(67 балів)	
Теми	1	2	3	4	5	6	7	8
Лекції (теми, бали)	Множини натуральних, цілих та раціональних чисел (2 бали)	Поліноми, подільність поліномів(2 бали)	Комплексні числа (2 бали)	Елементи теорії множин (2 бали)	Алгебри. Групи (3 бали)	Відображення груп (2 бали)	Кільця над числовими множинами (2 бали)	Фактор-кільця та ідеали (2 бали)
Практичні заняття (теми, бали)	Використання методу математичної індукції на множині натуральних чисел (22 бали)	Подільність поліномів. Знаходження НСД поліномів (22 бали)	Знаходження суми, добутку, різниці та частки двох комплексних чисел. Формула Муавра. Корені з комплексних чисел (44 бали)	Знаходження суми, добутку, різниці та частки двох комплексних чисел. Степені комплексних чисел. Формула Муавра. Корені з комплексних чисел (22 бали)	Побудова ізоморфізму адитивної групи цілих чисел та мультиплікативної групи додатних раціональних чисел за допомогою логарифмічної функції (33 бали)	Побудова фактор-груп циклічних та абелевих груп (22 бали)	Дослідження будови числових кілець. Кільця із заданими типами операцій (11 бали)	Відображення числових кілець. Фактор-кільця та ідеали над числовими множинами (22 бали)
Самостійна робота	Самостійна робота (5 балів)			Самостійна робота (5 балів)			Самостійна робота (5 балів)	
Поточний контроль (вид, бали)	Модульна контрольна робота 1 (25 балів)			Модульна контрольна робота 2 (25 балів)			Модульна контрольна робота 3 (25 балів)	
Підсумковий контроль	Екзамен (40 балів)							

(вид, бали)	
-------------	--

7. Рекомендовані джерела

Основна:

1. Авдєєва, Т. В. Алгебра. Основи алгебраїчних структур [Електронний ресурс] : навчальний посібник / Т. В. Авдєєва, В. М. Горбачук ; НТУУ «КПІ». – Електронні текстові дані (1 файл: 1,28 Мбайт). – Київ : НТУУ «КПІ», 2015. – 80 с.
https://mph.kpi.ua/assets/img/books/FMF/2._Zagalna_Algebra.pdf
2. Андрійчук В.І., Забавський Б.В. Алгебра і теорія чисел // -Львів. -2005.
3. Завало С. Т., Алгебра і теорія чисел : [в 2-х ч.] : підручник для студ. фіз.-мат. фак. пед. ін-тів / С. Т. Завало, В. М. Костарчук, Б. І. Хацет., Київ : Вища школа, 1974.
4. Завало С.Т. та ін. Алгебра і теорія чисел: Практикум. Частина 2. – К.: Вища шк., 1986. – 264 с.
5. Безущак О.О., Ганюшкін О.Г. Теорія груп: Навчальний посібник для студентів механіко-математичного факультету. – К.: ВПЦ «Київський університет», 2005. – 123 с.
6. Бондаренко Є.В. Теорія кілець. – К.: ВПЦ “Київський університет”, 2012.
7. Завало С.Т. Курс алгебри. – К.: Вища школа, 1985. – 503 с.
8. Безущак О.О., Ганюшкін О.Г. Завдання для практичних занять з алгебри і теорії чисел (теорія груп). – К.: ВПЦ «Київський університет», 2007. – 103 с.
9. Безущак О.О., Ганюшкін О.Г. Завдання до практичних занять з алгебри і теорії чисел (теорія кілець і полів): для студентів університетів – К.: ВПЦ «Київський університет», 2020. – 137 с.
10. Головащук Н.С., Кочубінська Є.А., Овсієнко С.А. Збірник задач з теорії кілець (базовий курс). – К.: ВПЦ «Київський університет», 2013. – 86 с.
11. Кудрявцева Г.М. Поля. Приклади і задачі. – К.: ВПЦ «Київський університет», 2005. – 50 с.

Додаткова:

12. Dummit D.S., Foote R.M. Abstract algebra. 3rd Edition. — John Wiley and Sons, Inc., New York, 2004. — 945 p.
13. Herstein I.N. Abstract algebra. 3rd Edition. — John Wiley and Sons, Inc., New York, 1996. — 272 p.
14. Кудрявцева Г.М., Олійник А.С. Кільця. Приклади і задачі. – К.: ВПЦ «Київський університет», 2005. – 60 с.
<https://algebramechmat.wordpress.com/24-2/>