



## **1. Пояснювальна записка**

Метою комплексного екзамену з вищої математики є перевірка рівня сформованості загальної математичної культури випускників та фактичних знань, умінь і навичок з фундаментальних розділів математики, які необхідні при професійній діяльності в галузях виробництва, освіти та бізнесу, а також є базовими для успішного продовження навчання в магістратурі.

Програма комплексного екзамену з вищої математики (далі – Програма) є нормативним документом Київського столичного університету імені Бориса Грінченка, який розроблено кафедрою математики і фізики у відповідності з освітньою програмою та навчальним планом підготовки бакалаврів спеціальності 111 «Математика».

Програма містить основні питання з курсів лінійної алгебри, вищої алгебри та теорії чисел; аналітичної, конструктивної та диференціальної геометрії; математичного та комплексного аналізу; диференціальних рівнянь. У програмі вони об'єднані в чотири розділи: «Алгебра», «Геометрія», «Математичний аналіз», «Диференціальні рівняння».

Під час екзамену студент повинен показати загальне розуміння відповідної математичної теорії, демонструвати свідоме володіння математичними поняттями, розуміння взаємозв'язків і органічної єдності понять, фактів, уміння доказово аргументувати, наводити приклади і контрприкладів, ілюстрації, здатність застосувати теоретичні знання до розв'язування задач, володіння стандартними методами, прийомами, алгоритмами, а також спроможність інтегрувати, систематизувати й узагальнювати інформацію, вибудувати цілісну, повну й логічну відповідь.

Орієнтовний обсяг інформації з кожного питання даної програми, якою повинен володіти студент, визначається методичними вказівками, які розробляє і затверджує кафедра математики і фізики.

## **2. Методика проведення і оцінювання результатів комплексного екзамену з вищої математики**

Комплексний екзамен з математики проводиться в комбінованій формі: тестування в системі е-навчання Університету, перебуваючи при цьому безпосередньо на зв'язку із членами комісії, та усна співбесіда. Проводиться іспит в режимі онлайн з використанням Google Meet. Час виконання тестового завдання – чотири академічні години. За рішенням екзаменаційної комісії на екзамені під час підготовки до відповіді студентам може бути дозволено користуватися підручниками та навчальними посібниками, вказаними в програмі.

Комплексне тестове завдання містить 5 складових. Перша складова перевіряє знання основних фактів теорії одного з розділів Програми: «Алгебра», «Геометрія», «Математичний аналіз», «Диференціальні рівняння», здатність їх оперативно відтворювати, систематизувати й узагальнювати, наводити окремі власні приклади на підтвердження викладених думок. Завдання передбачає відкриту відповідь з наступним її захистом у форматі усної співбесіди.

Інші чотири складові перевіряють здатність застосувати теоретичні знання до розв'язування задач кожного із чотирьох розділів програми, володіння стандартними методами, прийомами, алгоритмами.

До уваги беруться уміння грамотно висловлювати думку, аргументувати логічні кроки і використовувати відповідну символіку.

### 3. Критерії оцінювання навчальних досягнень студентів

**Складова №1 (теоретичне питання).** Максимальна кількість балів – **40:**

**37–40 балів** – повне і правильне формулювання всіх теоретичних фактів – означень, теорем, наслідків з них тощо, повне і правильне обґрунтування основних фактів, ілюстрація теоретичного матеріалу вдало підібраними прикладами; відповідь повна, цілісна, логічна.

**33–36 балів** – повне і правильне формулювання всіх теоретичних положень – означень, теорем, наслідків з них тощо, доведення основних фактів з незначними логічними прогалинами в обґрунтуваннях або незначними технічними помилками;

**29–32 балів** – повне і правильне формулювання всіх теоретичних положень – означень, теорем, наслідків з них тощо;

**25–28 балів** – правильне, але, можливо, неповне формулювання всіх основних теоретичних положень – означень, теорем, наслідків з них тощо;

**21–24 балів** – формулювання основних теоретичних фактів, із можливими незначними помилками або недоліками;

**0–20 балів** – відповідь неправильна (незнання основних фундаментальних положень, істотні помилки в означеннях, формулюваннях та доведеннях теорем, інших обґрунтуваннях) або відсутня.

**Складові №№2–5 (задача).** Максимальна кількість балів за задачу – **15**. Розв’язання задачі передбачає три відносно завершені етапи, кожен із яких оцінюється в **5** (за правильну відповідь) або **0** (за неправильну відповідь чи її відсутність) балів. Використання при оцінюванні «часткового балу» дає можливість враховувати неповне або частково правильне розв’язання задачі.

### Шкала оцінювання навчальних досягнень студентів

Оцінка за стобальною шкалою	Рейтингова оцінка	Критерії
90 – 100	A	<b>Відмінно</b> – відмінний рівень знань (умінь) в межах обов’язкового матеріалу з можливими незначними недоліками.
82 – 89	B	<b>Дуже добре</b> – достатньо високий рівень знань (умінь) в межах обов’язкового матеріалу без суттєвих (грубих) помилок.
75 – 81	C	<b>Добре</b> – в цілому добрий рівень знань (умінь) з незначною кількістю помилок
69 – 74	D	<b>Задовільно</b> – посередній рівень знань (умінь) із значною кількістю недоліків, достатній для подальшого навчання або професійної діяльності.
60 – 68	E	<b>Достатньо</b> – мінімально можливий допустимий рівень знань (умінь).
1 – 59	Fx	<b>Незадовільно</b> – незадовільний рівень знань.

## 4. Змістова частина програми

### *Алгебра*

Екзаменовані повинні володіти теоретико-множинною і логічною символікою, основними поняттями алгебри і теорії чисел (алгебраїчна операція, група, кільце, поле, векторний простір, лінійна залежність і незалежність, лінійні оператори, матриці і визначники, прості числа, подільність, конгруентність, многочлени), мати чітке уявлення про основні числові системи і їх будову, володіти навичками розв'язування систем лінійних рівнянь, знати основні арифметичні застосування теорії конгруенцій.

1. Натуральні числа (аксіоми Пеано). Принцип математичної індукції, різні форми індукції.
2. Групи, приклади груп, найпростіші властивості груп. Підгрупи: означення і критерій.
3. Кільце, підкільце: означення і критерій, найпростіші властивості.
4. Поле, підполе. Найпростіші властивості поля.
5. Поле комплексних чисел. Алгебраїчна та тригонометрична форми комплексного числа.
6. Системи лінійних рівнянь. Критерій сумісності і визначеності системи лінійних рівнянь. Розв'язування систем лінійних рівнянь методом послідовного виключення невідомих.
7. Арифметичний  $n$ -вимірний векторний простір. Лінійна залежність і лінійна незалежність системи векторів. Ранг і базис системи векторів.
8. Існування ненульових розв'язків системи лінійних однорідних рівнянь. Фундаментальна система розв'язків системи лінійних однорідних рівнянь, її побудова.
9. Обернена матриця. Розв'язування системи лінійних рівнянь матричним способом. Формули Крамера.
10. Векторні простори, підпростори. Базис і розмірність скінченновимірного векторного простору.
11. Лінійні оператори. Матриця лінійного оператора. Власні значення і власні вектори. Теорема про зв'язок характеристичних чисел і власних значень лінійного оператора. Зведення матриці до діагонального вигляду.
12. Теорема про ділення з остачею в кільці цілих чисел. НСД і НСК двох чисел і зв'язок між ними. Алгоритм Евкліда.
13. Прості числа. Нескінченність множини простих чисел. Канонічний розклад складеного числа у вигляді добутку простих чисел та єдиність такого розкладу. Канонічний запис та застосування такого запису до знаходження НСД і НСК чисел.
14. Означення і основні властивості конгруентності цілих чисел. Повна і зведена система лишків, їх властивості. Теореми Ейлера і Ферма.
15. Лінійні конгруенції з одним невідомим, теорема про число розв'язків. Способи розв'язування лінійних конгруенцій.
16. Многочлени над полем. Теорема про ділення з остачею. НСД двох многочленів. Алгоритм Евкліда.
17. Основна теорема алгебри та наслідки з неї.
18. Многочлени з дійсними коефіцієнтами. Спряженість уявних коренів таких многочленів. Незвідні над полем дійсних чисел многочлени та канонічний розклад многочленів над полем дійсних чисел.
19. Многочлени над полем раціональних чисел. Цілі і раціональні корені многочлена з цілими коефіцієнтами. Незвідні над полем раціональних чисел многочлени.

## *Геометрія*

Екзаменовані повинні володіти методами аналітичної геометрії, бути ознайомленими як з груповою, так і з структурною точкою зору на геометрію, з сучасним аксіоматичним методом, основними фактами геометрії Лобачевського, проєктивної геометрії, мати загальні уявлення про різні неевклідові геометрії, використовувати знання топології при означенні ліній і поверхонь, вміти застосовувати теоретичні знання на практиці, зокрема, до доведення теорем і розв'язування задач. Це означає, що при відповіді студенти повинні продемонструвати достатньо широкий та системний погляд на геометрію.

1. Різні види систем координат на площині. Геометричний зміст координат точки. Теорія прямих на площині (в аналітичному викладі).
2. Еліпс, гіпербола, парабола, їх канонічні рівняння і властивості. Класифікація алгебраїчних кривих 2-го порядку на евклідовій площині.
3. Теорія прямих у просторі. Кут між прямими (в аналітичному викладі).
4. Теорія площин у просторі. Кут між площинами. Відстань від точки до площини (в аналітичному викладі).
5. Взаємне розміщення двох площин, прямої і площини та двох прямих у просторі (в аналітичному викладі).
6. Елементи векторної алгебри в тривимірному евклідовому просторі. Скалярний, векторний і мішаний добутки векторів, їх властивості і застосування.
7. Поверхні обертання. Циліндричні та конічні поверхні (в аналітичному викладі).
8. Еліпсоїд, гіперболоїди і параболоїди (в аналітичному викладі).
9. Група рухів площини, їх аналітичний запис і класифікація. Основні підгрупи. Застосування рухів до розв'язування задач.
10. Група перетворень подібності площини і її підгрупи. Подібність фігур. Застосування перетворень подібності до розв'язування задач.
11. Проективні координати точки і прямої. Проективні перетворення простору.
12. Основні теореми проєктивної геометрії: Дезарга, про гармонічні властивості чотири-вершинника, Паскаля та Бріансона, їх застосування до розв'язування задач на побудову.
13. Аксиома паралельності і площина Лобачевського. Взаємне розміщення прямих на площині Лобачевського. Властивості паралельних і розбіжних прямих. Несуперечливість системи аксіом площини Лобачевського.
14. Огляд теорії вимірювання (довжин відрізків, площ многокутників, об'ємів многогранників).
15. Гладкі криві. Природна параметризація лінії. Кривина кривої.
16. Скрут кривої. Тригранник Френе.
17. Гладкі поверхні в евклідовому просторі. Перша квадратична форма поверхні та її застосування. Поняття про внутрішню геометрію поверхні.
18. Топологічне перетворення. Ейлерова характеристика замкнених поверхонь. Теорема Ейлера для многогранників.

## *Математичний аналіз*

Екзаменовані повинні володіти основними поняттями математичного аналізу (функція, послідовність, ряд, границя, неперервність, похідна, інтеграл); мати уявлення про метричний простір та основні елементарні функції дійсної й комплексної змінної; володіти навичками обчислення границь, похідних, інтегралів; знати застосування диференціального та інтегрального числення до розв'язування практичних задач.

1. Числові множини. Межі, точні межі числової множини. Множини натуральних ( $N$ ), цілих ( $Z$ ), раціональних ( $Q$ ) та дійсних ( $R$ ) чисел, їх властивості.
2. Поняття числової послідовності. Границя послідовності. Основні властивості границь. Границя обмеженої монотонної послідовності. Число  $e$ .
3. Поняття функції однієї змінної. Границя функції в точці. Властивості границь. Деякі важливі границі.
4. Поняття функції багатьох змінних (на прикладі функції двох змінних). Границя функції в точці. Повторні границі.
5. Неперервність у точці функцій дійсної змінної. Властивості неперервних функцій. Властивості функцій, неперервних на відрізьку.
6. Неперервність функцій кількох змінних та функцій комплексної змінної. Властивості функцій, неперервних на обмеженій замкненій множині.
7. Поняття похідної для функцій однієї змінної. Диференційовність функції в точці, необхідні та достатні умови диференційовності. Правила диференціювання.
8. Похідні основних елементарних функцій. Похідна функції комплексної змінної. Голоморфні функції.
9. Теореми Ролля, Лагранжа, Коші.
10. Умови сталості і монотонності функцій однієї змінної. Екстремуми функцій однієї змінної. Необхідні та достатні умови існування екстремуму. Опуклість і точки перегину. Асимптоти.
11. Поняття диференційованості функції багатьох змінних. Диференціал та частинні похідні. Екстремум функцій багатьох змінних. Необхідні та достатні умови існування екстремуму.
12. Первісна та її властивості. Невизначений інтеграл. Основні методи інтегрування.
13. Інтеграл Рімана для функції однієї змінної. Необхідні та достатні умови інтегровності функцій однієї змінної. Основні методи обчислення інтегралів. Застосування інтеграла до розв'язування геометричних задач (знаходження площ та об'ємів).
14. Інтеграл Рімана для функцій двох та трьох змінних (означення, умови існування та обчислення).
15. Поняття криволінійного інтеграла для функції дійсної змінної та інтеграла по кривій для функції комплексної змінної. Властивості та обчислення криволінійних інтегралів для функцій дійсної змінної і інтегралів по кривій комплексної змінної. Інтегральна формула Коші.
16. Показникова функція дійсної змінної та комплексної змінної (означення і властивості).
17. Логарифмічна функція дійсної та комплексної змінної (означення та властивості).
18. Тригонометричні та обернені тригонометричні функції дійсної змінної (означення, властивості). Тригонометричні та гіперболічні функції комплексної змінної.
19. Числові ряди з дійсними та комплексними членами. Основні поняття. Геометрична прогресія та гармонічний ряд. Властивості збіжних рядів.
20. Ознаки збіжності додатних числових рядів. Абсолютно і умовно збіжні ряди та їх властивості. Знакозмінні ряди, їх збіжність. Ряд Лейбніца.
21. Степеневі ряди з дійсними та комплексними членами. Інтервал (круг) та радіус збіжності. Ряди Лорана для функцій комплексної змінної в околі ізольованих особливих точок.
22. Розвинення в степеневий ряд основних елементарних функцій. Застосування степеневих рядів до наближених обчислень. Формули Ейлера.
23. Лишки, формули для обчислень лишків в ізольованих особливих точках. Теореми Коші про суму лишків та їх застосування при обчисленні визначених інтегралів.

## *Диференціальні рівняння*

Екзаменовані повинні володіти основними поняттями теорії звичайних диференціальних рівнянь, знаннями умов існування та єдиності розв'язку задачі Коші, властивостей розв'язків лінійних рівнянь та систем, уміннями розв'язувати звичайні диференціальні рівняння першого порядку, що інтегруються в квадратурах, найпростіші диференціальні рівняння першого порядку, не розв'язані відносно похідної, зокрема, рівняння Лагранжа та Клеро, лінійні диференціальні рівняння вищих порядків, здатністю вирізняти з-поміж інших природні, фізичні, економічні та ін. динамічні явища і процеси, для моделювання яких можуть бути використані диференціальні рівняння, здатністю розробляти моделі таких процесів, аналізувати і трактувати розв'язок.

### 1. Основні поняття теорії диференціальних рівнянь:

- поняття диференціального рівняння, звичайного диференціального рівняння, його розв'язку; інтегральна крива;
- порядок диференціального рівняння;
- диференціальні рівняння та математичне моделювання. Приклади задач, які приводять до диференціальних рівнянь; - поле напрямів; ізокліни.

### 2. Умови існування і єдиності розв'язку задачі Коші для диференціального рівняння першого порядку:

- загальний та частинний розв'язки диференціального рівняння. Задача Коші. Геометричний зміст початкових умов для диференціальних рівнянь першого та другого порядків;
- теорема існування і єдиності розв'язку задачі Коші для нормального диференціального рівняння 1-го порядку;
- поняття про особливий розв'язок диференціального рівняння;

### 3. Диференціальні рівняння першого порядку, які інтегруються в квадратурах:

- диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними та звідні до них;
- однорідні та квазіоднорідні диференціальні рівняння;
- лінійні диференціальні рівняння; рівняння Бернуллі;
- диференціальні рівняння в повних диференціалах. Інтегрувальний множник.

### 4. Диференціальні рівняння першого порядку, не розв'язані відносно похідної:

- основні поняття. Теорема про існування та єдність розв'язку задачі Коші;
- найпростіші типи диференціальних рівнянь першого порядку, не розв'язаних відносно похідної;
- рівняння Лагранжа і Клеро;
- особливі розв'язки, умови їх існування. Дискримінантна крива. Обвідна.

### 5. Інтегрування диференціальних рівнянь вищих порядків:

- основні поняття: загальний вигляд диференціального рівняння вищих порядків; розв'язок, загальний, частинний розв'язки; початкові умови, задача Коші;
- теорема про існування і єдиність розв'язку задачі Коші;
- інтегрування та зниження порядку деяких типів диференціальних рівнянь вищих порядків.

### 6. Загальна теорія лінійних диференціальних рівнянь $n$ -го порядку:

- теорема про існування та єдиність розв'язку задачі Коші;
- лінійна залежність та незалежність системи функцій, визначник Вронського (вронскіан);
- розв'язки лінійного однорідного рівняння, їх властивості;

- фундаментальна система розв'язків, її існування;
- властивість вронскіана системи розв'язків лінійного однорідного рівняння. Теорема про загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння;
- формула Остроградського-Ліувілля.

7. Лінійні однорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами:

- характеристичне рівняння;
- вигляд частинних розв'язків лінійного однорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами у випадках: а) усі корені характеристичного рівняння прості дійсні; б) серед коренів характеристичного рівняння є комплексно-спряжені; в) характеристичне рівняння має кратні корені;
- загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами.

8. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами:

- структура загального розв'язку лінійного неоднорідного рівняння;
- метод варіації довільних сталих;
- лінійне рівняння зі спеціальною (у вигляді квазіполінома) правою частиною. Відшукування частинного розв'язку методом невизначених коефіцієнтів (нерезонансний та резонансний випадки);
- математичні моделі на основі лінійних диференціальних рівнянь другого порядку.

### Рекомендована література

#### *Алгебра*

1. Завало С.Т. та ін. Алгебра і теорія чисел: Практикум. Частина 2. К.: Вища шк., 1986. 264с.
2. Завало С.Т. Курс алгебри. К.: Вища школа, 1985. 503 с.
3. Лінійна алгебра та аналітична геометрія: Навч. посібник / В. В. Булдігін, І. В. Алексеєва, В.О.Гайдей, О.О. Диховичний, Н.Р. Коновалова, Л.Б. Федорова; за ред. проф. В.В. Булдігіна. К.: ТВіМС, 2011. 224 с.;
4. Лінійна алгебра та аналітична геометрія. Практикум. (І курс І семестр) / Уклад.: І. В. Алексеєва, В. О. Гайдей, О. О. Диховичний, Л. Б. Федорова. К: НТУУ «КПІ», 2013. 180 с.
5. Лінійна алгебра і аналітична геометрія. Практикум: навч. посіб. / В. Р. Зеліско, Г. В. Зеліско ; Львів. нац. ун-т ім. Івана Франка. Львів : ЛНУ ім. І. Франка, 2014. 373 с.
6. Дубовик В. П. Вища математика: навч. посіб. / В. П. Дубовик, І.І. Юрик. К: АСК, 2005. 647 с. ISBN 966-539-320-0.
7. Авдєєва Т.В., Горбачук В.М. Алгебра. Основи алгебраїчних структур. Навчальний посібник. К.: НТУУ «КПІ», 2015.
8. Гриньов Б.В. Вища алгебра: підручник / Б.В. Гриньов, І.К. Кириченко. Х.: Гімназія, 2008. 182с
9. Астаф'єва М. М., Литвин О.С., Радченко С.П., Самойленко Ю.І., Семеняка С.О. Вища математика: готуємось до атестації. Частина II. Практикум: навчальний посібник (2023). Київ, 330 с
10. Астаф'єва М. М., Литвин О.С., Радченко С.П., Самойленко Ю.І., Семеняка С.О. Вища математика: готуємось до атестації. Частина I. Теоретичні матеріали: навчальний посібник (2022). Київ, 176 с.

### ***Геометрія***

1. М.І. Шкіль, Т.В. Колесник, В.М. Котлова. Вища математика у 3-х кн. Кн.1. Аналітична геометрія з елементами алгебри. Вступ до математичного аналізу. К : "Либідь", 1994.
2. Ординська З. П., Орловський І. В., Руновська М. К. Конспект лекцій з аналітичної геометрії та лінійної алгебри (для студентів технічних факультетів), НТУУ «КПІ», 2014.
3. Лінійна алгебра та аналітична геометрія. Практикум. (І курс І семестр) / Уклад.: І.В. Алексеєва, В.О. Гайдей, О.О. Диховичний, Л.Б. Федорова. К: НТУУ «КПІ», 2013. 180 с.
4. Лінійна алгебра та аналітична геометрія: навч. посібник / Ю.В. Бондарчук, Б.В. Олійник. Київ: Києво-Могилянська академія, 2010. 176 с.
5. Астаф'єва М. М., Литвин О.С., Радченко С.П., Самойленко Ю.І., Семеняка С.О. Вища математика: готуємось до атестації. Частина II. Практикум: навчальний посібник (2023). Київ, 330 с
6. Астаф'єва М. М., Литвин О.С., Радченко С.П., Самойленко Ю.І., Семеняка С.О. Вища математика: готуємось до атестації. Частина I. Теоретичні матеріали: навчальний посібник (2022). Київ, 176 с.

### ***Математичний аналіз***

1. Давидов М.О. Курс математичного аналізу. Ч. 1, 2. К.: Вища шк., 1978.
2. Шкіль М.І., Колесник Т.В., Котлова В.М. Вища математика. Книга 1. К: Либідь, 2010.
3. Шкіль М.І., Колесник Т.В. Вища математика. Книга 2. К: Либідь, 2010.
4. Давыдов Н.А., Коровкин П.П., Никольский В.Н. Сборник задач по математическому анализу. – М.: Просвещение, 1981.
5. Дюженкова Л.І., Дюженкова О.Ю., Михалін Г.О. Вища математика: Приклади і задачі.– Київ «Академія». 2002.
6. Математичний аналіз у задачах і прикладах: У 2-х ч.: Навчальний посібник для студентів вузів / Л.І. Дюженкова, Т.В. Колесник та ін. – К: Вища школа, 2003.
7. Астаф'єва М. М., Литвин О.С., Радченко С.П., Самойленко Ю.І., Семеняка С.О. Вища математика: готуємось до атестації. Частина II. Практикум: навчальний посібник (2023). Київ, 330 с
8. Астаф'єва М. М., Литвин О.С., Радченко С.П., Самойленко Ю.І., Семеняка С.О. Вища математика: готуємось до атестації. Частина I. Теоретичні матеріали: навчальний посібник (2022). Київ, 176 с.

### ***Диференціальні рівняння***

1. Самойленко А.М., Перестюк М.О., Парасюк І.О. Диференціальні рівняння. К.: Либідь, 2003.
2. Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк М.О. Диференціальні рівняння. Приклади і задачі. К.: Наукова думка, 2004.
3. Шкіль М.І., Колесник Т.В. Вища математика. Книга 2. К: Либідь, 2010.
4. Шкіль М.І., Лейфура В.М., Самусенко П.Ф. Диференціальні рівняння. К.: Техніка, 2003.
5. Математичний аналіз у задачах і прикладах: У 2-х ч.: Навчальний посібник для студентів вузів / Л.І. Дюженкова, Т.В. Колесник та ін. К: Вища школа, 2003. Ч. 2.
6. Дюженкова Л.І., Дюженкова О.Ю., Михалін Г.О. Вища математика: Приклади і задачі. Київ «Академія». 2002.
7. Астаф'єва М.М., Литвин О.С., Радченко С.П., Самойленко Ю.І., Семеняка С.О. Вища математика: готуємось до атестації. Частина II. Практикум: навчальний посібник (2023). Київ, 330 с
8. Астаф'єва М.М., Литвин О.С., Радченко С.П., Самойленко Ю.І., Семеняка С.О. Вища математика: готуємось до атестації. Частина I. Теоретичні матеріали: навчальний посібник (2022). Київ, 176 с.