

Київський університет імені Бориса Грінченка
Факультет інформаційних технологій та математики
Кафедра математики і фізики



“ЗАТВЕРДЖУЮ”
Проректор з науково-методичної
та навчальної роботи
Олексій ЖИЛЬЦОВ
« 01 » _____ 2023 р.

РОБОЧА ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

ПРИКЛАДНІ АСПЕКТИ МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

спеціальності	<u>111 Математика</u>
освітнього рівня	<u>другого (магістерського)</u>
освітньої програми	<u>111.00.02 Математичне моделювання</u>

Київ – 2023



Розробник:

Самойленко Юлія Іванівна, доктор фізико-математичних наук, старший науковий співробітник, професор кафедри математики і фізики Факультету інформаційних технологій та математики Київського університету імені Бориса Грінченка.

Викладач

Самойленко Юлія Іванівна, доктор фізико-математичних наук, старший науковий співробітник, професор кафедри математики і фізики Факультету інформаційних технологій та математики Київського університету імені Бориса Грінченка.


Робочу програму розглянуто і затверджено на засіданні кафедри математики і фізики

Протокол від 23 серпня 2023 р. № 8

Завідувач кафедри  Світлана СЕМЕНЯКА

Робочу програму погоджено з керівником освітньої програми 111.00.02 Математичне моделювання

_____. 2023 р.

Керівник освітньої програми  Володимир ПРОШКІН
(підпис)

Робочу програму перевірено

____.____. 20__ р.

Заступник директора/декана  Євген ІВАНІЧЕНКО

Пролонговано:

на 20__/20__ н.р. _____ (підпис) _____ (ПІБ), « ____ » ____ 20__ р., протокол № ____

на 20__/20__ н.р. _____ (підпис) _____ (ПІБ), « ____ » ____ 20__ р., протокол № ____

на 20__/20__ н.р. _____ (підпис) _____ (ПІБ), « ____ » ____ 20__ р., протокол № ____

на 20__/20__ н.р. _____ (підпис) _____ (ПІБ), « ____ » ____ 20__ р., протокол № ____

1. Опис навчальної дисципліни

Найменування показників	Характеристика дисципліни за формами навчання	
	денна	заочна
Вид дисципліни	обов'язкова	
Мова викладання, навчання та оцінювання	українська	
Загальний обсяг кредитів / годин	4 / 120	
Курс	1	
Семестр	1	
Кількість змістових модулів з розподілом:	4	
Обсяг кредитів	4	
Обсяг годин, в тому числі:	120	
Аудиторні	32	
Модульний контроль	8	
Семестровий контроль	30	
Самостійна робота	50	
Форма семестрового контролю	екзамен	

2. Мета та завдання навчальної дисципліни

Мета: формування у студентів знань, умінь і навичок дослідження динамічних систем, які описують фізичні явища та процеси.

Завдання:

- отримання базових знань з основних понять і властивостей різних типів динамічних систем, серед яких одновимірні динамічні системи, гамільтонові динамічні системи, динамічні системи на площині, скінченно вимірні динамічні системи та нескінченно вимірні динамічні системи;
- набуття студентами практичних навичок по дослідженню загальних властивостей динамічних систем на площині та динамічних систем, які використовуються у природознавстві, техніці, біології, економіці, тощо.

Компетентності, формуванню яких сприяє навчальна дисципліна:

ЗК-1 Здатність комплексно розв'язувати проблему. Здатність виявляти наукову сутність проблем у професійній сфері, знаходити адекватні шляхи щодо їх розв'язання; володіння системним, цілісним підходом до аналізу і оцінки ситуації.

ЗК-2 Критичне мислення. Здатність аналізувати, верифікувати, оцінювати повноту та достовірність інформації в ході професійної діяльності, за необхідності доповнювати й синтезувати відсутню інформацію.

ЗК-3 Креативність. Продукування нових ідей, творчий підхід до їх реалізації; здатність до новаторської діяльності.

ЗК-7 Здатність здобувати нові знання, уміння та інтегрувати їх з уже наявними; спроможність аналізувати явище, ситуацію, проблему, враховуючи різні параметри, фактори, причини; здатність адаптувати мислення для вирішення задач у змінених умовах чи нестандартних ситуаціях.

СК-1 Знання та розуміння. Спеціалізовані концептуальні знання, набуті у процесі навчання на рівні новітніх досягнень, які є основою для оригінального мислення, дослідницької та/або

інноваційної діяльності; здатність використовувати набуті знання у практичній професійній діяльності.

СК-3 Розв'язання проблем. Здатність критично осмислювати й розв'язувати складні задачі та проблеми, що потребують міждисциплінарних підходів, оновлення та інтеграції знань, часто в умовах неповної / недостатньої інформації та суперечливих вимог.

СК-4 Моделювання. Спроможність переносити математичні знання у нематематичні контексти, розробляти адекватні математичні моделі реальних процесів і явищ, досліджувати їх, обираючи відповідні методи, в тому числі комп'ютерні, та інтерпретувати результати дослідження в термінах досліджуваного процесу (явища).

СК-8 Самоосвіта та підвищення кваліфікації. Здатність до самоосвіти та підвищення кваліфікації у сфері математики і її застосування.

3. Результати навчання за дисципліною

У результаті вивчення навчальної дисципліни студент повинен

знати:

- основні аспекти моделювання різних процесів та явищ за допомогою сучасної теорії динамічних систем; типи моделей, етапи математичного моделювання динамічних систем;
- різні підходи моделювання динамічних систем: балансовий підхід, гамільтоновий (варіаційний) підхід, метод аналогій, ієрархічний підхід;
- біологічні моделі (модель Мальтуса, Ферхюльста, Лотки-Вольтерри);
- основні принципи моделювання хвильових процесів в гідродинаміці, поняття відокремленої хвилі, зокрема, ударної хвилі, солітона, пікона;
- фізичний зміст рівнянь руху хвиль на мілкій воді, зокрема, рівняння Кортевега-де Фріза, модифікованого рівняння Кортевега-де Фріза, рівняння Бенжаміна-Бона-Маконі, модифікованого рівняння Камаса-Холма;
- особливості моделювання динамічних процесів на мілкій воді у середовищах з малою в'язкістю і змінними характеристиками;
- методи математичного моделювання транспортних потоків, паводкових явищ, тощо за допомогою нелінійних динамічних систем;
- явище градієнтної катастрофи для нелінійних динамічних систем на прикладі рівняння типу Хопфа, його фізичну інтерпретацію;
- проблему blow-up для інтегровних динамічних систем;
- зв'язок асимптотичних розв'язків систем, що описують рух хвиль в середовищах з малою в'язкістю та змінними характеристиками з умовами типу Гюгонію.

вміти:

- досліджувати математичні моделі біологічних процесів, інтерпретувати отримані результати;
- досліджувати математичні моделі хвильових процесів в гідродинаміці;
- застосовувати методи G'/G , \tanh - \coth – метод, та інші для побудови розв'язків нелінійних динамічних систем, що описуються рівнянням Кортевега-де Фріза, модифікованим рівнянням Кортевега-де Фріза, рівнянням Бенжаміна-Бона-Маконі, модифікованим рівнянням Камаса-Холма, модифікованим рівнянням Дегасперіса-Процесі, у вигляді різних типів відокремлених хвиль, серед яких ударні хвилі, солітони, пікони, тощо;
- застосовувати WKB – метод та нелінійний WKB – метод до дослідження нелінійних динамічних систем, зокрема, тих, що використовуються для моделювання хвильових процесів у середовищах з малою дисперсією та змінними характеристиками;
- досліджувати математичні моделі транспортних потоків, паводкових явищ, тощо, що описуються нелійними диференціальними рівняннями з частинними похідними першого порядку;
- інтерпретувати явище градієнтної катастрофи для моделей, що описуються нелійними диференціальними рівняннями з частинними похідними першого порядку;

– встановлювати зв'язок асимптотичних розв'язків рівнянь, що описують рух хвиль в середовищах з малою в'язкістю, з умовами типу Гюгоніо;

та досягти наступних програмних результатів навчання:

РН-3-1 Демонструвати на рівні застосування ґрунтовні знання ключових понять та фактів лінійної алгебри та теорії матриць, аналітичної та диференціальної геометрії, диференціального та інтегрального числення функції дійсної та комплексної змінних, багатьох дійсних змінних, теорії рядів, диференціальних рівнянь, логіки і теорії множин, дискретної математики, теорії ймовірностей та математичної статистики, а також відтворювати знання окремих спеціальних розділів вищої та прикладної математики (прикладний функціональний аналіз, теорія динамічних систем, алгебраїчна топологія, аналітика даних) в обсязі, необхідному для володіння математичним апаратом відповідної галузі знань і використання математичних методів у обраній професії.

РН-3-2 Володіти основами математичних дисциплін і теорій, які вивчають моделі природничих, технічних, економічних і соціальних процесів.

РН-3-3 Знати й розуміти математичні методи аналізу, прогнозування та оцінки параметрів моделей; основні підходи до перетворення математичної моделі в комп'ютерну, якісного та кількісного дослідження побудованої моделі, аналізу та інтерпретації отриманих при моделюванні результатів.

РН-3-6 Знати й розуміти межі застосування тих чи інших математичних теорій, методів, інструментів.

РН-У-1 Коректно проводити логічні міркування, грамотно вибудовувати доведення математичних фактів, використовуючи, в тому числі, класичні методи доведення (від супротивного, математичної індукції, конструктивний та ін.).

РН-У-2 Демонструвати вміння використовувати фундаментальні математичні закономірності при розв'язуванні теоретичних та прикладних математичних задач і проблем, які потребують, зокрема, інтеграції набутих знань, методів з різних розділів математики, в т.ч. багатокритеріальні задачі та задачі з неповними даними.

РН-У-10 Уміти формулювати математичну задачу, знаходити й аналізувати відповідності між поставленою задачею й існуючими моделями, аргументовано обирати оптимальні шляхи та інструменти розв'язання, аналізувати й осмислювати отриманий розв'язок, представляти результати роботи й обґрунтовувати запропоновані рішення на сучасному науково-технічному й професійному рівні

4. Структура навчальної дисципліни

Назви змістових модулів і тем	Кількість годин			
	денна форма			
	Усього	у тому числі		
л.		пр.	м.к.	с.р.
Змістовий модуль 1				
Змістовий модуль 1. Основні засади математичного моделювання динамічних систем				
Тема 1. Типи моделей, етапи математичного моделювання динамічних систем	8	2	2	4
Тема 2. Моделювання хвильових процесів в гідродинаміці	10	2	2	6
Разом за змістовим модулем 1	20	4	4	10
Змістовий модуль 2. Нелінійні динамічні моделі				
Тема 3. Нелінійні динамічні моделі на прикладі рівнянь руху хвиль на мілкій воді	20	4	4	12
Разом за змістовим модулем 2	22	4	4	12
Змістовий модуль 3. Моделювання динамічних процесів на мілкій воді у середовищах з малою в'язкістю і змінними характеристиками				

Тема 4. Дослідження динамічних систем, що описують поширення хвиль на мілкій воді у середовищах з малою в'язкістю і змінними характеристиками	22	4	4		14
Разом за змістовим модулем 3	24	4	4	2	14
Змістовий модуль 4. Математичне моделювання явищ за допомогою нелінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними першого порядку					
Тема 5. Моделювання систем, що описуються нелінійними диференціальними рівняннями з частинними похідними першого порядку. Проблема blow-up для таких систем	10	2	2		6
Тема 6. Проблема blow-up для інтегровних та збурених інтегровних динамічних систем	12	2	2		8
Разом за змістовим модулем 4	24	4	4	2	14
Семестровий контроль	30				
Усього годин	120	16	16	8	50

5. Програма навчальної дисципліни

Змістовий модуль 1. Основні засади математичного моделювання динамічних систем

Тема 1. Типи моделей, етапи математичного моделювання динамічних систем.

Математичне моделювання динамічних систем. Типи моделей, етапи математичного моделювання динамічних систем. Різні підходи моделювання динамічних систем: балансовий підхід, гамільтоновий (варіаційний) підхід, метод аналогій, ієрархічний підхід. Лінійні і нелінійні моделі. Приклади математичних моделей в біології (модель Мальтуса, Ферхюльста, модель Лотки-Вольтерри).

Тема 2. Моделювання хвильових процесів в гідродинаміці.

Моделювання хвильових процесів в гідродинаміці. Поняття відокремленої хвилі, зокрема, ударної хвилі, солітона, пікона. Використання поняття відокремленої хвилі у різних галузях природознавства: теорії твердого тіла, гідродинаміці, біології, тощо.

Змістовий модуль 2. Нелінійні динамічні моделі

Тема 3. Нелінійні динамічні моделі на прикладі рівнянь руху хвиль на мілкій воді.

Нелінійні динамічні системи на прикладі рівнянь руху хвиль на мілкій воді. Рівняння Кортевега-де Фріза, модифікованого рівняння Кортевега-де Фріза, рівняння Бенжаміна-Бона-Маконі, модифікованого рівняння Камаса-Холма. Побудова їх розв'язків за допомогою методу G'/G , \tanh - \cotanh – методу, тощо.

Змістовий модуль 3. Моделювання динамічних процесів на мілкій воді у середовищах з малою в'язкістю і змінними характеристиками

Тема 4. Дослідження динамічних систем, що описують поширення хвиль на мілкій воді у середовищах з малою в'язкістю і змінними характеристиками.

Моделювання динамічних процесів на мілкій воді у середовищах з малою в'язкістю і змінними характеристиками. Асимптотичні методи побудови розв'язків рівнянь з малим параметром та змінними коефіцієнтами, що описують процеси поширення хвиль на мілкій воді. Метод WKВ та узагальнений метод WKВ для побудови таких розв'язків.

Змістовий модуль 4. Математичне моделювання явищ за допомогою нелінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними першого порядку.

Тема 5. Моделювання систем, що описуються нелінійними диференціальними рівняннями з частинними похідними першого порядку. Проблема blow-up для таких систем.

Математичне моделювання транспортних потоків, паводкових явищ, тощо за допомогою нелінійних динамічних систем, що описуються нелінійними диференціальними рівняннями з

частинними похідними першого порядку. Проблема blow-up для нелінійних динамічних систем на прикладі рівняння типу Хопфа, її фізична інтерпретація.

Тема 6. Проблема blow-up для інтегровних та збурених інтегровних динамічних систем.
Проблема blow-up для інтегровних динамічних систем. Зв'язок асимптотичних розв'язків рівнянь, що описують рух хвиль в середовищах з малою в'язкістю з умовами типу Гюгоніо.

6 Контроль навчальних досягнень

6.1 Система оцінювання навчальних досягнень студентів

№ з/п	Вид діяльності студента	Макс. кількість балів за одиницю	Модуль 1		Модуль 2		Модуль 3		Модуль 4	
			Кільк. одиниць до розрахунку	Макс. кількість балів за вид	Кільк. одиниць до розрахунку	Макс. кількість балів за вид	Кільк. одиниць до розрахунку	Макс. кількість балів за вид	Кільк. одиниць до розрахунку	Макс. кількість балів за вид
1	Відвідування лекцій	1	2	2	2	2	2	2	2	2
2	Відвідування практичних занять	1	2	2	2	2	2	2	2	2
3	Виконання завдань для самостійної роботи	5	1	5	1	5	1	5	1	5
4	Робота на практичних	10	2	20	2	20	2	20	2	20
5	Виконання модульної контрольної роботи	25	1	25	1	25	1	25	1	25
	Разом	216		54		54		54		54

Максимальна кількість балів:	60 (іспит – 40 балів)
Розрахунок коефіцієнта	60/216 = 0,28

* На практичному занятті оцінюється усна або / та письмова відповідь, ураховується також виконання домашнього завдання. За кожний змістовий модуль студент може отримати максимально 20 балів і це число балів є середнім арифметичним (округленим до цілого) балів, отриманих на тих практичних заняттях даного змістового модуля, де він був опитаний і оцінений. Якщо цей середній арифметичний показник менший, ніж 6 балів, студент має відповідні теми модуля опрацювати і в індивідуальному порядку здати викладачу; іншими видами робіт бали не компенсуються.

6.2. Завдання для самостійної роботи та критерії її оцінювання

№ з/п	Назва теми	Кількість годин	Бали
Змістовий модуль 1. Основні засади математичного моделювання динамічних систем		10	5
1	Типи моделей, етапи математичного моделювання динамічних систем	4	2
2	Моделювання хвильових процесів в гідродинаміці	6	3
Змістовий модуль 2. Нелінійні динамічні моделі		12	5

3	Нелінійні динамічні моделі на прикладі рівнянь руху хвиль на мілкій воді	12	5
Змістовий модуль 3. Моделювання динамічних процесів на мілкій воді у середовищах з малою в'язкістю і змінними характеристиками		14	5
4	Дослідження динамічних систем, що описують поширення хвиль на мілкій воді у середовищах з малою в'язкістю і змінними характеристиками	14	5
Змістовий модуль 4. Математичне моделювання явищ за допомогою нелінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними першого порядку		14	5
5	Моделювання систем, що описуються нелінійними диференціальними рівняннями з частинними похідними першого порядку. Проблема blow-up для таких систем	6	2
6	Проблема blow-up для інтегровних та збурених інтегровних динамічних систем	8	3
Разом		50	20

Критерії оцінювання самостійної роботи (за 5-бальною шкалою)

- 5 балів – відмінний рівень виконання з можливими незначними недоліками;
- 4 бали – у цілому добрий рівень виконання з незначною кількістю несуттєвих помилок;
- 3 бали – посередній рівень виконання зі значною кількістю недоліків та / або незначною кількістю помилок;
- 2 бали – мінімально можливий допустимий рівень виконання;
- 0 балів – робота не зараховується і потребує повторного виконання або доопрацювання.

6.3. Форми проведення модульного контролю та критерії оцінювання: письмова модульна контрольна робота, яка за сумарною кількістю виконаних завдань оцінюється по 25-ти бальній шкалі.

Кількість балів	Критерії оцінювання
25- 24	Задачі розв'язані правильно; обрано оптимальний метод її розв'язання; наведено повне і правильне розв'язання з належним обґрунтуванням всіх логічних кроків; розв'язок адекватно інтерпретовано в термінах реальної задачі; виклад грамотний.
23-21	Є повне і правильне розв'язання, наявність незначних логічних прогалин в обґрунтуваннях або незначних технічних помилок.
20-18	У цілому правильна ідея, хід розв'язання, наявність незначних логічних помилок або неповнота розв'язання, технічні помилки. Або розв'язано правильно біля 76 - 80% задач.
17-16	Частково правильне розв'язання (містить деякі правильно виконані кроки), наявні помилки або відступі деякі кроки розв'язання. Або розв'язано правильно 70 - 75% задач.
15-14	Є розуміння сутності задачі та методів її розв'язання, але наявні суттєві помилки в розв'язанні (відсутні або неправильні деякі кроки); відсутня інтерпретація розв'язку. Або розв'язано правильно лише 60-69% задач.

13-0	Не володіє навчальним матеріалом, не може застосувати його на практиці, не володіє навичками розв'язання типових практичних задач відповідної теми. Модульна контрольна робота не зараховується і потребує повторної задачі.
------	--

6.4. Форми проведення семестрового контролю та критерії оцінювання: екзамен проводиться дистанційно онлайн в режимі відеоконференції засобами Google Meet та з використанням системи Moodle.

Студент дає відповіді на запитання та завдання запропонованого білету. Білет містить 5 питань (завдань) (сумарна кількість балів - 40 балів).

6.5 Шкала відповідності оцінок

Рейтингов а оцінка	Оцінка за стобальною шкалою	Значення оцінки
A	90 – 100 балів	Відмінно – відмінний рівень знань (умінь) в межах обов'язкового матеріалу з можливими незначними недоліками
B	82-89 балів	Дуже добре – достатньо високий рівень знань (умінь) в межах обов'язкового матеріалу без суттєвих (грубих) помилок
C	75-81 балів	Добре – в цілому добрий рівень знань (умінь) з незначною кількістю помилок
D	69-74 балів	Задовільно – посередній рівень знань (умінь) із значною кількістю недоліків, достатній для подальшого навчання або професійної діяльності
E	60-68 балів	Достатньо – мінімально можливий допустимий рівень знань (умінь)
FX	35-59 балів	Незадовільно з можливістю повторного складання – незадовільний рівень знань, з можливістю повторного перескладання за умови належного самостійного доопрацювання
F	1-34 балів	Незадовільно з обов'язковим повторним вивченням курсу – досить низький рівень знань (умінь), що вимагає повторного вивчення дисципліни

7. Навчально-методична карта дисципліни

Разом: 120 год., із них: лекції – 16 год., практичні заняття – 16 год., модульний контроль – 8 год., самостійна робота – 50 год, семестровий контроль – 30 год.

Модулі (назви, бали)	1. Основні засади математичного моделювання динамічних систем (54 бали)		2. Нелінійні динамічні моделі (54 бали)	3. Моделювання динамічних процесів на мілкій воді у середовищах з малою в'язкістю і змінними характеристиками (54 бали)	4. Математичне моделювання явищ за допомогою нелінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними першого порядку (54 бали)	
	1	2	3	4	5	6
Теми						
Лекції (теми, бали)	Типи моделей, етапи математичного моделювання динамічних систем (2 бали)	Моделювання хвильових процесів в гідродинаміці (2 бали)	Нелінійні динамічні моделі на прикладі рівнянь руху хвиль на мілкій воді (2 бали)	Дослідження динамічних систем, що описують поширення хвиль на мілкій воді у середовищах з малою в'язкістю і змінними характеристиками. (2 бали)	Моделювання систем, що описуються нелінійними диференціальними рівняннями з частинними похідними першого порядку. Проблема blow-up (2 бали)	Проблема blow-up для інтегровних та збурених інтегровних динамічних систем (2 бали)
Практичні заняття (теми, бали)	Побудова моделей динамічних систем на прикладі моделей в біології (11 балів)	Моделювання хвильових процесів на прикладі явища поширення хвиль на мілкій воді (11 балів)	Дослідження рівнянь Кортевега-де Фріза та рівнянь типу рівняння Кортевега-де Фріза (22 бали)	Застосування WKB методу та нелінійного WKB методу до дослідження динамічних систем (22 бали)	Методи побудови розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними першого порядку. Вивчення явища blow-up (11 балів)	Дослідження проблеми blow-up для інтегровних та збурених інтегровних динамічних систем (11 балів)
Самостійна робота	Самостійна робота (5 балів)		Самостійна робота (5 балів)	Самостійна робота (5 балів)	Самостійна робота (5 балів)	
Поточний контроль (вид, бали)	Модульна контрольна робота 1 (25 балів)		Модульна контрольна робота 2 (25 балів)	Модульна контрольна робота 3 (25 балів)	Модульна контрольна робота 4 (25 балів)	
Семестровий контроль	Екзамен (40 балів)					
Підсумковий бал	216×0,28+40=100 балів					

8. Рекомендована література

Базова

1. Самойленко А.М., Перестюк М.О., Парасюк І.О. Диференціальні рівняння. – К.: Либідь, 2003. – 600 с.
2. Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк М.О. Диференціальні рівняння.

Приклади і задачі. Київ : Наукова думка, 2004. 504 с.

3. Хусаїнов Д.Я., Харченко І.І., Шатирко А.В., Введення в моделювання динамічних систем: Навч. посібник. К.: ВПЦ “Київський університет”, 2010. 130 с.
4. Самойленко В.Г., Самойленко Ю.І. Асимптотичні розв'язки задачі Коші для рівняння Корте-вега – де Фріза зі змінними коефіцієнтами // Укр. мат. журн. Київ. – 2007. – Т.59, № 1. – С. 122 – 132.
5. Samoilenko V.H., Samoilenko Yu.I. Asymptotic soliton-like solutions to the singularly perturbed Benjamin–Bona–Mahony equation with variable coefficients // Journal of Mathematical Physics. – 2019. – 60, № 1. – P. 011501 – 011513.
6. Lyashko S.I., Samoilenko V.Hr., Samoilenko Yu.I., Lyashko N.I. Asymptotic analysis of the Korteweg-de Vries equation by the nonlinear WKB technique // Mathematical Modeling and Computing. – 2021. – Vol. 8, № 3. – P. 368 – 378.
7. Samoilenko V., Zappale E., Samoilenko Yu. Asymptotic step-like solutions of the singularly perturbed Burgers equation // Physics of Fluids. – 2023. – Vol. 35, № 6. –P. 067106.

Допоміжна

1. Jordon D.W., Smith P. Nonlinear Ordinary Differential Equations. – Oxford: Oxford Applied Mathematics and Computing Science Series, 1995. – 382 с.
2. Самойленко А.М., Борисенко С.Д., Матарацио Дж. та ін . Диференціальні моделі. Стійкість. К., 2000.