

Київський університет імені Бориса Грінченка
Факультет інформаційних технологій та математики
Кафедра математики і фізики



“ЗАТВЕРДЖУЮ”

Проректор з науково-методичної
та навчальної роботи
Олексій ЖИЛЬЦОВ

« 09 » _____ 2023 р.

**РОБОЧА ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ
ПРИКЛАДНИЙ ФУНКЦІОНАЛЬНИЙ АНАЛІЗ**

для студентів

спеціальності	111 Математика
освітнього рівня	другого (магістерського)
освітньої програми	111.00.02 Математичне моделювання

КИЇВСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ БОРИСА ГРІНЧЕНКА
Ідентифікаційний код 02130554
Начальник відділу
моніторингу якості освіти

Програма № 0130/23
Жильцов
(підпис) (прізвище, ініціали)
« » 20 23

Київ – 2023

Розробники:

Самойленко Валерій Григорович, доктор фізико-математичних наук, професор, професор кафедри математики і фізики,
Самойленко Юлія Іванівна, доктор фізико-математичних наук, старший науковий співробітник, професор кафедри математики і фізики.

Викладач:

Самойленко Валерій Григорович, доктор фізико-математичних наук, професор, професор кафедри математики і фізики

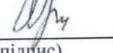
Робочу програму розглянуто і затверджено на засіданні кафедри математики і фізики

Протокол від 23 серпня 2023 р. № 8

Завідувач кафедри  Світлана СЕМЕНЯКА
 (підпис)

Робочу програму погоджено з керівником освітньої програми 111.00.02 Математичне моделювання

_____. 2023 р.

Керівник освітньої програми  Володимир ПРОШКІН
 (підпис)

Робочу програму перевірено

_____. 2023 р.

Заступник директора/декана  Євген ІВАНЧЕНКО
 (підпис)

Пролонговано:

на 20__/20__ н.р. _____ (підпис) _____ (ПІБ), «__»__ 20__ р., протокол № __

на 20__/20__ н.р. _____ (підпис) _____ (ПІБ), «__»__ 20__ р., протокол № __

на 20__/20__ н.р. _____ (підпис) _____ (ПІБ), «__»__ 20__ р., протокол № __

на 20__/20__ н.р. _____ (підпис) _____ (ПІБ), «__»__ 20__ р., протокол № __

1. Опис навчальної дисципліни

Найменування показників	Характеристика дисципліни за формами навчання	
	денна	заочна
Вид дисципліни	обов'язкова	
Мова викладання, навчання та оцінювання	українська	
Загальний обсяг кредитів / годин	4/120	
Курс	1	
Семестр	1	
Кількість змістових модулів з розподілом:	4	
Обсяг кредитів	4	
Обсяг годин, в тому числі:	120	
Аудиторні	32	
Модульний контроль	8	
Семестровий контроль	30	
Самостійна робота	50	
Форма семестрового контролю	екзамен	

2. Мета та завдання навчальної дисципліни

Мета: формування у студентів знань, вмінь і навичок щодо застосувань теоретичних основ функціонального аналізу у професійній діяльності, зокрема, в освітній галузі, а також для вивчення математичних моделей різних фізичних процесів і явищ, які описуються диференціальними та інтегральними рівняннями.

Завдання:

- отримання базових знань з функціонального аналізу, серед яких поняття і властивості гільбертових, банахових просторів, поняття функціоналу та оператора;
- отримання знань з теорії перетворення Фур'є, ортогональних рядів Фур'є;
- набуття студентами практичних навичок щодо дослідження повноти просторів, визначення норм операторів та функціоналів, побудови перетворення Фур'є.

Викладання навчальної дисципліни «Прикладний функціональний аналіз» спрямоване на формування таких загальних та спеціальних (фахових) компетентностей.

Загальні компетентності

ЗК-1 Здатність комплексно розв'язувати проблему. Здатність виявляти наукову сутність проблем у професійній сфері, знаходити адекватні шляхи щодо їх розв'язання; володіння системним, цілісним підходом до аналізу і оцінки ситуації.

ЗК-2 Критичне мислення. Здатність аналізувати, верифікувати, оцінювати повноту та достовірність інформації в ході професійної діяльності, за необхідності доповнювати й синтезувати відсутню інформацію.

ЗК-3 Креативність. Продукування нових ідей, творчий підхід до їх реалізації; здатність до новаторської діяльності.

ЗК-7 Здатність здобувати нові знання, уміння та інтегрувати їх з уже наявними; спроможність аналізувати явище, ситуацію, проблему, враховуючи різні параметри, фактори, причини; здатність адаптувати мислення для вирішення задач у змінених умовах чи нестандартних ситуаціях.

Спеціальні (фахові) компетентності

СК-1 Знання та розуміння. Спеціалізовані концептуальні знання, набуті у процесі навчання на рівні новітніх досягнень, які є основою для оригінального мислення, дослідницької та/або інноваційної діяльності; здатність використовувати набуті знання у практичній професійній діяльності.

СК-3 Розв'язання проблем. Здатність критично осмислювати й розв'язувати складні задачі та проблеми, що потребують міждисциплінарних підходів, оновлення та інтеграції знань, часто в умовах неповної / недостатньої інформації та суперечливих вимог.

СК-4 Моделювання. Спроможність переносити математичні знання у нематематичні контексти, розробляти адекватні математичні моделі реальних процесів і явищ, досліджувати їх, обираючи відповідні методи, в тому числі комп'ютерні, та інтерпретувати результати дослідження в термінах досліджуваного процесу (явища).

СК-8 Самоосвіта та підвищення кваліфікації. Здатність до самоосвіти та підвищення кваліфікації у сфері математики і її застосування.

3. Результати навчання за дисципліною

У результаті вивчення навчальної дисципліни студент повинен

знати:

- першу та другу нерівності Коші;
- простір неперервних функцій, простір інтегрованих з квадратом функцій;
- означення скрізь щільної множини, сепарабельного простору.
- означення норми та нормованих просторів, збіжності за нормою;
- поняття скалярного добутку, збіжності, означення гільбертового простору;
- означення ортогонального ряду Фур'є, рівність Парсеваля;
- означення неперервного функціоналу, норми функціоналу;
- означення неперервного оператора, норми оператора.

вміти:

- доводити першу та другу нерівності Коші;
- знаходити норму елементів нормованого простору;
- досліджувати збіжність за нормою елементів нормованого простору;
- досліджувати властивості нормованих просторів, серед яких повнота, сепарабельність;
- досліджувати ортогональність системи елементів;
- досліджувати неперервність функціоналів, знаходити норми функціоналів;
- досліджувати неперервність операторів, знаходити норми операторів.

Досягти наступних **програмних результатів навчання:**

РН-3-1 Демонструвати на рівні застосування ґрунтовні знання ключових понять та фактів лінійної алгебри та теорії матриць, аналітичної та диференціальної геометрії, диференціального та інтегрального числення функції дійсної та комплексної змінних, багатьох дійсних змінних, теорії рядів, диференціальних рівнянь, логіки і теорії множин, дискретної математики, теорії ймовірностей та математичної статистики, а також відтворювати знання окремих спеціальних розділів вищої та прикладної математики (прикладний функціональний аналіз, теорія динамічних систем, алгебраїчна топологія, аналітика даних) в обсязі, необхідному для володіння математичним апаратом відповідної галузі знань і використання математичних методів у обраній професії.

РН-3-3 Знати й розуміти математичні методи аналізу, прогнозування та оцінки параметрів моделей; основні підходи до перетворення математичної моделі в комп'ютерну, якісного та кількісного дослідження побудованої моделі, аналізу та інтерпретації отриманих при моделюванні результатів.

РН-3-6 Знати й розуміти межі застосування тих чи інших математичних теорій, методів, інструментів.

РН-У-1 Коректно проводити логічні міркування, грамотно вибудовувати доведення математичних фактів, використовуючи, в тому числі, класичні методи доведення (від супротивного, математичної індукції, конструктивний та ін.).

РН-У-2 Демонструвати вміння використовувати фундаментальні математичні закономірності при розв'язуванні теоретичних та прикладних математичних задач і проблем, які потребують, зокрема, інтеграції набутих знань, методів з різних розділів математики, в т.ч. багатокритеріальні задачі та задачі з неповними даними.

PH-U-10 Уміти формулювати математичну задачу, знаходити й аналізувати відповідності між поставленою задачею й існуючими моделями, аргументовано обирати оптимальні шляхи та інструменти розв'язання, аналізувати й осмислювати отриманий розв'язок, представляти результати роботи й обґрунтовувати запропоновані рішення на сучасному науково-технічному й професійному рівні

4. Структура навчальної дисципліни

Назви змістових модулів і тем	Розподіл годин між видами робіт			
	Ус бог о	Аудиторн а		с.р.
		л.	пр.	
Змістовий модуль 1. Метричні простори				
<i>Тема 1.</i> Нерівність Коші, нерівність Мінковського. Метрика і метричні простори	10	2	2	6
<i>Тема 2.</i> Приклади метричних просторів	10	2	2	6
Модульний контроль	2			
Разом за змістовим модулем 1	22	4	4	12
Змістовий модуль 2. Нормовані простори				
<i>Тема 3.</i> Норма і нормовані простори	10	2	2	6
<i>Тема 4.</i> Банахові простори	10	2	2	6
Модульний контроль	2			
Разом за змістовим модулем 2	22	4	4	12
Змістовий модуль 3. Гільбертові простори і ряди Фур'є				
<i>Тема 5.</i> Гільбертові простори	10	2	2	6
<i>Тема 6.</i> Ряди Фур'є	10	2	2	6
Модульний контроль	2			
Разом за змістовим модулем 3	22	4	4	12
Змістовий модуль 4. Функціонали і оператори				
<i>Тема 7.</i> Неперервні функціонали	11	2	2	7
<i>Тема 8.</i> Неперервні оператори	11	2	2	7
Модульний контроль	2			
Разом за змістовим модулем 4	24	4	4	14
Семестровий контроль	30			
Усього годин	120	16	16	50

5. Програма навчальної дисципліни

Змістовий модуль 1. Метричні простори

Тема 1. Метрика і метричні простори.

Означення множини, метрики, метричних просторів. Замкнуті та відкриті множини, замикання множини. Фундаментальна послідовність. Поняття еквівалентних метрик.

Тема 2. Приклади метричних просторів.

Простір неперервних функцій, простір інтегрованих функцій, множина числових послідовностей l_p , множина інтегрованих за Лебегом функцій.

Змістовий модуль 2. Нормовані простори.

Тема 3. Норма і нормовані простори.

Скрізь щільні множини, сепарабельні простори. Означення норми та нормованих просторів. Сепарабельні простори. Компактні множини та компактні простори.

Тема 4. Банахові простори.

Поняття фундаментальної послідовності і повноти простору. Означення банахового простору. Приклади банахових просторів.

Змістовий модуль 3. Гільбертові простори і ряди Фур'є.**Тема 5. Гільбертові простори.**

Поняття скалярного добутку. Приклади просторів зі скалярним добутком. Збіжність за нормою та слабка збіжність послідовності елементів з простору зі скалярним добутком. Означення гільбертового простору. Приклади гільбертових просторів.

Тема 6. Ряди Фур'є.

Ортогональні системи елементів, ортогональні ряди Фур'є. Ортогоналізація системи лінійно незалежних елементів гільбертового простору. Рівність Парсеваля. Базис гільбертового простору.

Змістовий модуль 4. Функціонали і оператори.**Тема 7. Неперервні функціонали.**

Означення неперервного та лінійного функціоналу. Слабка збіжність функціоналів. Норма функціоналу. Приклади неперервних функціоналів.

Тема 8. Неперервні оператори.

Означення лінійного та неперервного оператора. Норма оператора. Сильна та слабка збіжність операторів.

Тема 9. Прикладні аспекти застосування теорії операторів.

Загальні принципи і підходи використання теорії операторів при дослідженні різноманітних математичних і фізичних моделей.

6. Контроль навчальних досягнень**6.1. Система оцінювання навчальних досягнень студентів**

№ з/п	Вид діяльності студента	Макс. кількість балів за одиницю	Модуль 1		Модуль 2		Модуль 3		Модуль 4	
			Кільк. одиниць до розрахунку	Макс. кількість балів за вид	Кільк. одиниць до розрахунку	Макс. кількість балів за вид	Кільк. одиниць до розрахунку	Макс. кількість балів за вид	Кільк. одиниць до розрахунку	Макс. кількість балів за вид
1	Відвідування лекцій	1	2	2	2	2	2	2	2	2
2	Відвідування практичних занять	1	2	2	2	2	2	2	2	2
3	Робота на практичних заняттях	10	2	20	2	20	2	20	2	20
4	Виконання завдань самостійної роботи	5	1	5	1	5	1	5	1	5
4	Виконання модульної контрольної роботи	25	1	25	1	25	1	25	1	25
5	Разом	216	-	54	-	54	-	54	-	54
	Максимальна кількість балів:	60 балів (іспит - 40 балів)								
	Розрахунок коефіцієнта	60/216 = 0,28								

6.2. Завдання для самостійної роботи та критерії її оцінювання

Самостійна робота виконується протягом опрацювання відповідного змістового модуля. Кількість балів за самостійну роботу залежить від дотримання таких вимог:

- своєчасність і самостійність виконання завдань, повний обсяг їх виконання;

- якість виконання завдань (повнота викладення теми, наявність прикладів і джерел, на які спирався студент при опрацюванні теми, тощо);
- творчий підхід у виконанні завдань.

№	Назва теми для самостійного опрацювання	К-ть год.	Бали
Змістовий модуль 1. Метричні простори		12	5
1	Нерівність Коші, нерівність Мінковського. Метрика і метричні простори	6	3
2	Приклади метричних просторів	6	2
Змістовий модуль 2. Нормовані простори		12	5
3	Норма і нормовані простори	6	3
4	Банахові простори	6	2
Змістовий модуль 3. Гільбертові простори і ряди Фур'є		12	5
5	Гільбертові простори	6	2
6	Ряди Фур'є	6	3
Змістовий модуль 4. Функціонали і оператори		14	5
7	Неперервні функціонали	7	1
8	Неперервні оператори	7	2
Разом		50	20

6.3. *Форми проведення модульного контролю та критерії оцінювання:* письмова модульна контрольна робота, яка за сумарною кількістю виконаних завдань оцінюється по 25-ти бальній шкалі.

Кількість балів	<u>Критерії оцінювання</u>
25- 24	Задачі розв'язані правильно; обрано оптимальний метод її розв'язання; наведено повне і правильне розв'язання з належним обґрунтуванням всіх логічних кроків; розв'язок адекватно інтерпретовано в термінах реальної задачі; виклад грамотний.
23-21	Є повне і правильне розв'язання, наявність незначних логічних прогалин в обґрунтуваннях або незначних технічних помилок.
20-18	У цілому правильна ідея, хід розв'язання, наявність незначних логічних помилок або неповнота розв'язання, технічні помилки. Або розв'язано правильно біля 76 - 80% задач.
17-16	Частково правильне розв'язання (містить деякі правильно виконані кроки), наявні помилки або відступи деякі кроки розв'язання. Або розв'язано правильно 70 - 75% задач.
15-14	Є розуміння сутності задачі та методів її розв'язання, але наявні суттєві помилки в розв'язанні (відсутні або неправильні деякі кроки); відсутня інтерпретація розв'язку. Або розв'язано правильно лише 60-69% задач.
13-0	Не володіє навчальним матеріалом, не може застосувати його на практиці, не володіє навичками розв'язання типових практичних задач відповідної теми. Модульна контрольна робота не зараховується і потребує повторної задачі.

6.4. *Форми проведення семестрового контролю та критерії оцінювання.*

Семестровий контроль проводиться в письмовій формі за екзаменаційними білетами. Критерії оцінювання: 10 балів – перше (теоретичне) питання, 10 балів – друге (теоретичне) питання, 10 балів – третє (практичне) завдання, 10 балів – четверте (практичне) завдання. Якщо ж освітній процес проходить дистанційно, то екзамен проводиться онлайн в режимі відеоконференції засобами GoogleMeet та з використанням системи Moodle.

Перелік питань, які виносяться на екзамен:

1. Записати і довести першу нерівність Коші.
2. Записати і довести нерівність Буняковського.
3. Сформулювати означення метрики і поняття метричного простору. Дати приклади. Пояснити поняття еквівалентних метрик.
4. Сформулювати означення збіжної послідовності елементів метричного простору, поняття фундаментальної послідовності і означення повного метричного простору. Дати приклади.
5. Сформулювати означення простору неперервних функцій, простору інтегрованих функцій, простору інтегрованих з квадратом функцій, простору нескінченних числових послідовностей l^p , простору обмежених послідовностей.
6. Сформулювати означення норми і означення нормованого простору. Дати приклади.
7. Сформулювати означення збіжної послідовності елементів нормованого простору, поняття фундаментальної послідовності і повного нормованого простору.
8. Сформулювати означення банахового простору і дати приклади банахових просторів.
9. Сформулювати означення скалярного добутку і дати приклади просторів зі скалярним добутком.
10. Сформулювати означення збіжної за нормою послідовності елементів з нормованого простору. Дати приклади.
11. Пояснити поняття слабкої збіжності послідовності елементів з простору зі скалярним добутком.
12. Сформулювати означення гільбертового простору і дати приклади гільбертових просторів.
13. Сформулювати означення системи ортогональних елементів і пояснити поняття ряду Фур'є.
14. Сформулювати означення функціоналу, зокрема, лінійного і неперервного функціоналу. Дати приклади лінійних і неперервних функціоналів.
15. Пояснити поняття слабкої збіжності функціоналів.
16. Сформулювати означення норми функціоналу і дати приклади норм лінійних і неперервних функціоналів.
17. Сформулювати означення лінійного і неперервного оператора. Дати приклади таких операторів.
18. Сформулювати означення норми оператора і дати приклади норм лінійних і неперервних операторів.
19. Пояснити поняття сильної та слабкої збіжності операторів. Дати відповідні приклади.

6.5. Шкала відповідності оцінок

Рейтингова оцінка	Оцінка за стобальною шкалою	Значення оцінки
A	90-100 балів	Відмінно – відмінний рівень знань/умінь/навичок в межах обов'язкового матеріалу з можливими незначними недоліками
B	82-89 балів	Дуже добре – достатньо високий рівень знань/умінь/навичок в межах обов'язкового матеріалу без суттєвих (грубих) помилок
C	75-81 балів	Добре – в цілому добрий рівень знань/умінь/навичок з незначною кількістю помилок

D	69-74 балів	Задовільно – посередній рівень знань/умінь/навичок із значною кількістю недоліків, достатній для подальшого навчання або професійної діяльності
E	60-68 балів	Достатньо – мінімально можливий допустимий рівень знань/умінь/навичок
Fx	1-59 балів	Незадовільно – досить низький рівень знань/умінь/навичок, що вимагає повторного проходження практики

7. Навчально-методична карта дисципліни

Разом: 120 год., із них: лекції – 16 год., практичні заняття – 16 год., модульний контроль – 8 год., самостійна робота – 50 год., семестровий контроль – 30 год.

Модулі (назви, бали)	1. Метричні простори (54 бали)		2. Нормовані простори (54 бали)		3. Гільбертові простори і ряди Фур'є (54 бали)		4. Функціонали і оператори (54 балів)	
	1	2	3	4	5	6	7	8
Теми								
Лекції (теми, бали)	1. Нерівність Коші, нерівність Мінковського. Метрика і метричні простори (1 бал)	2. Приклади метричних просторів (1 бал)	3. Норма і нормовані простори. (1 бал)	4. Банахові простори (1 бал)	5. Гільбертові простори (1 бал)	6. Ряди Фур'є (1 бал)	7. Неперервні функціонали (1 бал)	8. Неперервні оператори (1 бал)
Практичні заняття (теми, бали)	1. Застосування нерівностей Коші та нерівності Мінковського до оцінки нескінченних сум числових послідовностей. Застосування нерівності Буняковського до оцінки інтеграла суми інтегрованих функцій. (11 балів)	2. Перевірка аксіом метрики, дослідження множин на замкнутість та відкритість. Дослідження фундаментальності послідовностей елементів метричних просторів. Дослідження еквівалентності метрик. (11 балів)	3. Дослідження сепарабельності просторів, перевірка аксіом норм різних просторів. Дослідження компактності множин. (11 балів)	4. Дослідження фундаментальної послідовності із різних просторів. (11 балів)	5. Дослідження збіжності за нормою та слабкої збіжності послідовності елементів з простору зі скалярним добутком. Дослідження гільбертовості просторів. (11 балів)	6. Застосування ортогональних рядів Фур'є до розкладу елементів гільбертового простору. (11 балів)	7. Обчислення норм лінійних неперервних функціоналів, дослідження збіжності функціоналів (11 балів)	8. Обчислення норм лінійних неперервних операторів. Дослідження сильної та слабкої збіжності операторів (11 балів)
Поточний контроль (вид, бали)	Модульна контрольна робота 1 (25 балів)		Модульна контрольна робота 2 (25 балів)		Модульна контрольна робота 3 (25 балів)		Модульна контрольна робота 4 (25 балів)	
Самостійна робота	Самостійна робота №1 (5 балів)		Самостійна робота №2 (5 балів)		Самостійна робота №3 (5 балів)		Самостійна робота №4 (5 балів)	
Підсумковий контроль	Екзамен (40 балів)							

8. Рекомендована література

Основна

1. Березанський Ю.М., Ус Г.Ф., Шефтель З.Г. Функціональний аналіз. Курс лекцій. – К.: Вища школа, 1990. – 600 с.
2. Збірник задач з функціонального аналізу. Видання друге, виправлене і доповнене. / Укладачі В. Б. Брайман, О. Ю. Константінов, О. Г. Кукуш, Ю. С. Мішура, О. Н. Нестеренко, А. В. Чайковський. – К.: 2023. – 313с.
3. Боярищева Т.В., Гудивок Т.В., Погоріляк О.О. Функціональний аналіз. Навчальний посібник для студентів спеціальностей “Математика”, “Прикладна математика”, “Статистика”. – Ужгород, 2013. – 125 с.

Додаткова

1. Гарасим Я.С., Недашковська А.М., Остудін Б.А. Методи розв’язування типових задач функціонального аналізу: Методичний посібник для студентів. – Львів: Простір М, 2015. – 72 с
2. Федак І.В. Функціональний аналіз: Навчальний посібник для студентів спеціальностей Інформатика», «Прикладна математика». – Івано-Франківськ: Сімик, 2011. – 120с.