

Київський університет імені Бориса Грінченка
Факультет інформаційних технологій та математики
Кафедра математики і фізики

«ЗАТВЕРДЖУЮ»
Проректор з науково-методичної та
навчальної роботи

Олексій ЖИЛЬЦОВ
« _____ » 2023р.



РОБОЧА ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНА ГЕОМЕТРІЯ І ТОПОЛОГІЯ
для студентів

спеціальності	111 Математика
освітнього рівня	першого (бакалаврського)
освітньої програми	111.00.01 Математика

Київ – 2023



Розробники: Радченко Сергій Петрович, кандидат фізико-математичних наук, доцент
Викладачі: Радченко Сергій Петрович, кандидат фізико-математичних наук, доцент.

Робочу програму розглянуто і затверджено на засіданні кафедри математики і фізики

Протокол від 1.09.2022 р. №1

Завідувач кафедри  Світлана СЕМЕНЬКА
 (підпис)

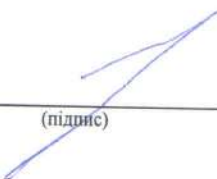
Робочу програму погоджено з гарантом освітньої програми 111.00.01 Математика

01.09.2022 р.


Керівник освітньої програми  Марія АСТАФ'ЄВА
 (підпис)

Робочу програму перевірено

 . . 2022 р.

Заступник директора/декана  Євген ІВАНІЧЕНКО
 (підпис)

Пролонговано:

на 2023/2024 н.р.  (С. Семенюка), «25» 08 2023 р., протокол № 8
 (підпис) (ПІБ)

на 20__/20__ н.р. _____ (_____), «__»__ 20__ р., протокол № ____
 (підпис) (ПІБ)

на 20__/20__ н.р. _____ (_____), «__»__ 20__ р., протокол № ____
 (підпис) (ПІБ)

на 20__/20__ н.р. _____ (_____), «__»__ 20__ р., протокол № ____
 (підпис) (ПІБ)

1. Опис навчальної дисципліни

Найменування показників	Характеристика дисципліни за формами навчання
	денна
Вид дисципліни	обов'язкова
Загальний обсяг кредитів / годин	5/150
Курс	3
Семестр	5
Кількість змістових модулів з розподілом:	2
Обсяг кредитів	5
Обсяг годин, в тому числі:	150
Аудиторні	70
Модульний контроль	10
Семестровий контроль	30
Самостійна робота	40
Форма семестрового контролю	іспит

2. Мета та завдання навчальної дисципліни

Робоча навчальна програма з курсу «Диференціальна геометрія і топологія» є нормативним документом Київського університету імені Бориса Грінченка, який розроблено кафедрою комп'ютерних наук і математики на основі освітньо-професійної програми підготовки здобувачів першого (бакалаврського) рівня відповідно до навчального плану спеціальності 111 Математика, освітньої програми 111.00.01 Математика

Робочу навчальну програму укладено згідно з вимогами Європейської кредитної трансферно-накопичувальної системи (ЄКТС) організації навчання.

Програма визначає обсяги знань, якими повинен опанувати здобувач першого (бакалаврського) рівня відповідно до алгоритму вивчення навчального матеріалу дисципліни «Диференціальна геометрія і топологія» та необхідне методичне забезпечення, складові і технологію оцінювання навчальних досягнень студентів.

Навчальна дисципліна «Диференціальна геометрія і топологія» складається з двох змістових модулів: Диференціальна геометрія, Топологія. Обсяг дисципліни – 150 год (5 кред.).

Метою викладання навчальної дисципліни «Диференціальна геометрія і топологія» є ознайомити студентів з фундаментальними поняттями диференціальної геометрії кривих ліній та поверхонь, вивчення методів розв'язування задач, враховуючи їх геометричний зміст.

Завдання полягає у формуванні теоретичних знань та практичних умінь при вивченні диференціальної геометрії та топології, використання отриманих знань у застосуваннях та набуття наступних компетентностей:

Загальні компетентності

- ЗК-1:** Здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу
- ЗК-2:** Здатність застосовувати знання у практичних ситуаціях
- ЗК-3:** Знання й розуміння предметної області та професійної діяльності
- ЗК-4:** Здатність спілкуватися державною мовою як усно, так і письмово
- ЗК-7:** Здатність учитися і оволодівати сучасними знаннями
- ЗК-8:** Здатність до пошуку, обробки та аналізу інформації з різних джерел
- ЗК-9:** Здатність приймати обґрунтовані рішення
- ЗК-10:** Здатність працювати в команді
- ЗК-12:** Здатність працювати автономно
- ЗК-13:** Визначеність і наполегливість щодо поставлених завдань і взятих обов'язків

Спеціальні (фахові) компетентності

СК-1: Здатність формулювати проблеми математично та в символній формі з метою спрощення їхнього аналізу й розв'язання.

СК-2: Здатність подавати математичні міркування та висновки з них у формі, придатній для цільової аудиторії, а також аналізувати та обговорювати математичні міркування інших осіб, залучених до розв'язання тієї самої задачі.

СК-3: Здатність здійснювати міркування та виокремлювати ланцюжки міркувань у математичних доведеннях на базі аксіоматичного підходу, а також розташовувати їх у логічну послідовність, у тому числі відрізняти основні ідеї від деталей і технічних викладок.

СК-4: Здатність конструювати формальні доведення з аксіом та постулатів і відрізняти правдоподібні аргументи від формально бездоганних

СК-5: Здатність до кількісного мислення

СК-6: Здатність розробляти і досліджувати математичні моделі явищ, процесів та систем

СК-8: Здатність до аналізу математичних структур, у тому числі до оцінювання обґрунтованості й ефективності використовуваних математичних підходів

СК-11: Здатність застосовувати математичні факти, теореми, методи й алгоритми, пакети програмного забезпечення до розв'язування прикладних задач із різних сфер життєдіяльності людини й суспільства.

3. Результати навчання за дисципліною

У результаті вивчення навчальної дисципліни студент повинен

знати:

- основні поняття і визначення диференціальної геометрії і топології;
- принципи побудови різних кривих ліній та поверхонь;
- класифікацію властивостей кривих ліній та поверхонь;
- основні теоретичні факти, що стосуються топологічних властивостей просторів;

уміти:

- розв'язувати задачі з визначення характеристик кривих на площині та в просторі;
- розв'язувати задачі з визначення характеристик кривих поверхонь в просторі;
- розв'язувати задачі топологічного характеру;
- доводити еквівалентність топологічних просторів;

та досягти наступних **програмних результатів навчання:**

РН-1: Знати основні етапи історичного розвитку математичних знань і парадигм, розуміти сучасні тенденції в математиці.

РН-3: Знати принципи *modus ponens* (правило виведення логічних висловлювань) та *modus tollens* (доведення від супротивного) і використовувати умови, формулювання, висновки, доведення та наслідки математичних тверджень.

РН-4: Розуміти фундаментальну математику на рівні, необхідному для досягнення інших вимог освітньої програми.

РН-7: Пояснювати математичні концепції мовою, зрозумілою для нефахівців у галузі математики.

РН-8: Здійснювати професійну письмову й усну комунікацію українською мовою та однією з іноземних мов

РН-10: Розв'язувати задачі придатними математичними методами, перевіряти умови виконання математичних тверджень, коректно переносити умови та твердження на нові класи об'єктів, знаходити й аналізувати відповідності між поставленою задачею й відомими моделями

РН-11: Розв'язувати конкретні математичні задачі, які сформульовано у формалізованому вигляді; здійснювати базові перетворення математичних моделей

РН-14: Знати теоретичні основи і застосовувати методи аналітичної та диференціальної геометрії для розв'язування професійних задач

PH-16: Знати теоретичні основи і застосовувати методи топології, функціонального аналізу й теорії диференціальних рівнянь для дослідження динамічних систем

4. Структура навчальної дисципліни

Назви змістових модулів і тем	Розподіл годин між видами робіт				
	Усього	Аудиторна:			с.р.
		л.	пр.	м.к.	
Змістовий модуль 1. Диференціальна геометрія					
Тема 1. Криві на площині.	22	6	8	2	6
Тема 2. Криві у просторі.	25	8	8	2	7
Тема 3. Поверхні в евклідовому просторі. Квадратичні форми. Лінії на поверхнях.	25	8	8	2	7
Разом за змістовим модулем 1	72	22	24	6	20
Змістовий модуль 2. Топологія					
Тема 4. Топологічні та метричні простори.	17	4	4	2	7
Тема 5. Операції з просторами.	17	4	4	2	7
Тема 6. Компактні простори.	14	4	4		6
Разом за змістовим модулем 2	48	12	12	4	20
Семестровий контроль	30				
Усього годин	150	34	36	10	40

5. Програма навчальної дисципліни

Змістовий модуль I. Диференціальна геометрія.

Тема 1. Криві на площині.

Відображення. Типи відображень. Одно-однозначне відображення. Неперервне та диференційоване відображення. Топологічне відображення. Локально топологічне відображення. Відображення кривих та областей. Поняття кривої. Параметризація кривої. Натуральна параметризація кривої. Регулярні криві. Достатня умова регулярності кривої. Кривина. Формули для кривини кривої при натуральній та довільній параметризації.

Тема 2. Криві у просторі.

Рівняння кривих у просторі. Кривина та скрут просторових кривих. Обчислення кривини та скруту кривин, заданих у різний спосіб. Лінії зі сталими кривиною та скрутом.

Тема 3. Поверхні в евклідовому просторі. Квадратичні форми. Лінії на поверхнях.

Поняття поверхні та її рівняння. Криволінійні координати. Властивості криволінійних поверхонь. Нормаль та дотична до поверхні. Умова існування нормалі та дотичної. Рівняння нормалі та дотичної до поверхні. Поняття квадратичних форм. Геометричний зміст першої квадратичної форми. Геометричний зміст другої квадратичної форми. Кути між лініями на поверхнях. Теорема Мен'є. Формули Родріга.

Змістовий модуль II. Топологія.

Тема 4. Топологічні та метричні простори

Поняття топології. Топологічні простори. Порівняння топологій. База топології. Приклади топологічних просторів. Приклади відкритих та замкнених множин. Інтервали та відрізки на прямій. Системи інтервалів. Відкриті та замкнені області в евклідовому просторі. Різні приклади топологій на множинах. Метрики та метричні простори. Зв'язок метричних просторів з топологічними. Приклади метричних просторів.

Тема 5. Операції з просторами

Відображення. Неперервне відображення. Гомеоморфізм. Ізоморфізм. Топологічні інваріанти. Фактор-простір, фактор-група, фактор-кільце та фактор-топологія. Склеювання. Простір орбіт. Добуток деяких топологічних просторів. Топологічна сума просторів. Зв'язність та лінійна зв'язність топологічних просторів. Диференційовані многовиди. Карта, атлас поверхні.

Тема 6. Компактні простори

Розшаровані простори. Дотичні простори. Репер. Розшарування. Перетини розшарування. Тензорне Розшарування. Метрика. Зв'язність. Коваріантна похідна. Простір афінної зв'язності. Геодезична крива. Тензор кривини. Тензор скруту. Тензор сегментарної кривини. Простір Рімана.

6. Контроль навчальних досягнень

6.1. Система оцінювання навчальних досягнень студентів

№ з/п	Вид діяльності студента	Макс. кількість балів за одиницю	Модуль 1		Модуль 2	
			Кільк. одиниць до розрахунку	Макс. кількість	Кільк. одиниць	Макс. кількість балів за вид
1	Відвідування лекцій	1	11	11	6	6
2	Відвідування практичних занять	1	12	12	6	6
3	Виконання завдань для самостійної роботи	5	1	5	1	5
4	Робота на практичних (семінарських) заняттях	10	12	120	6	60
5	Виконання модульної контрольної роботи	25	3	75	2	50
	Разом	-	-	223	-	127
Максимальна кількість балів: 350						
Розрахунковий коефіцієнт: 0,171						

6.2. Завдання для самостійної роботи та критерії її оцінювання.

№ з/п	Назва теми	Кількість годин	Бали
Змістовий модуль 1. Диференціальна геометрія		20	5
1	Знаходження похідної вектор-функції. Скалярний, векторний та псевдоскалярний добуток вектор-функції. Обчислення дотичної до кривих, заданих різними рівняннями. Обчислення довжин дуг кривих. Побудова рівняння нормалі кривої, заданої явним рівнянням. Побудова дотичної та нормалі кривої, заданої неявним рівнянням. Обчислення кривини плоскої кривої, заданої параметричними та неявними рівняннями. Побудова стичного кола. Побудова обвідної, еволюти та евольвенти.	6	2
2	Обчислення кривини та скруту просторової кривої, заданої параметричними та неявними рівняннями. Побудова дотичної, головної нормалі, бінормалі просторової кривої.	7	2
3	Обчислення довжини дуги просторової кривої; обчислення кута між кривими; обчислення площі деякої області на поверхні. Обчислення нормальної кривини поверхні. Побудова другої квадратичної форми поверхонь. Обчислення другої квадратичної форми. Головні напрямки та головні кривини поверхні. Формула Ейлера для деяких кривих другого порядку.	7	1
Змістовий модуль 2. Топологія		20	5
4	Приклади метричних просторів. Неперервність відображень метричних просторів. Гомеоморфізм метричних просторів. Приклади відкритих та замкнених множин. Відкриті та замкнені області в евклідовому просторі. Різні приклади топологій на множинах.	7	1
5	Відображення. Неперервне відображення. Гомеоморфізм. Ізоморфізм. Топологічні інваріанти. Фактор-простір, фактор-група, фактор-кільце та фактор-топологія. Склеювання.	7	2
6	Приклади топологічних сум просторів. Зв'язність та лінійна зв'язність конкретних топологічних просторів. Диференційовані многовиди.	6	2
Разом		40	10

Примітка: оцінювання результатів самостійної роботи здійснюють у ході письмового опитування теорії та виконання модульної контрольної роботи.

6.3. **Форми проведення модульного контролю та критерії оцінювання.**
Письмово, макс. оцінка - 25 балів.

6.4. **Форми проведення семестрового контролю та критерії оцінювання.**
Письмово, макс. оцінка - 40 балів, 4 завдання оцінюються по 10 балів кожне.

6.5. **Орієнтовний перелік питань для семестрового контролю.**

Відображення. Типи відображень. Неперервне та диференційоване відображення. Топологічне відображення. Поняття кривої. Параметризація кривої. Натуральна параметризація кривої. Регулярні криві. Достатня умова регулярності кривої. Кривина. Формули для кривини кривої при натуральній та довільній параметризації.

Рівняння кривих у просторі. Кривина та скрут просторових кривих. Обчислення кривини та скруту кривин, заданих у різних способ. Лінії зі сталими кривиною та скрутом.

Поняття поверхні та її рівняння. Криволінійні координати. Властивості криволінійних поверхонь. Нормаль та дотична до поверхні. Умова існування нормалі та дотичної. Рівняння нормалі та дотичної до поверхні. Геометричний зміст першої квадратичної форми. Геометричний зміст другої квадратичної форми. Кути між лініями на поверхнях. Теорема Мен'є. Формули Родріга.

Поняття топології. Топологічні простори. Порівняння топологій. База топології.

Приклади топологічних просторів. Приклади відкритих та замкнених множин. Інтервали та відрізки на прямій. Системи інтервалів. Відкриті та замкнені області в евклідовому просторі. Різні приклади топологій на множинах. Метрики та метричні простори. Зв'язок метричних просторів з топологічними. Приклади метричних просторів.

Відображення. Неперервне відображення. Гомеоморфізм. Ізоморфізм. Топологічні інваріанти. Фактор-простір, фактор-група, фактор-кільце та фактор-топологія.

6.6. Шкала відповідності оцінок

Рейтингова оцінка	Оцінка за стобальною шкалою	Значення оцінки
A	90 – 100 балів	Відмінно – відмінний рівень знань (умінь) в межах обов'язкового матеріалу з можливими незначними недоліками
B	82-89 балів	Дуже добре – достатньо високий рівень знань (умінь) в межах обов'язкового матеріалу без суттєвих (грубих) помилок
C	75-81 балів	Добре – в цілому добрий рівень знань (умінь) з незначною кількістю помилок
D	69-74 балів	Задовільно – посередній рівень знань (умінь) із значною кількістю недоліків, достатній для подальшого навчання або професійної діяльності
E	60-68 балів	Достатньо – мінімально можливий допустимий рівень знань (умінь)
FX	35-59 балів	Незадовільно з можливістю повторного складання – незадовільний рівень знань, з можливістю повторного перескладання за умови належного самостійного доопрацювання
F	1-34 балів	Незадовільно з обов'язковим повторним вивченням курсу – досить низький рівень знань (умінь), що вимагає повторного вивчення дисципліни

7. Навчально-методична картка дисципліни

Разом: 150 год., із них: лекції – 34 год., практичні заняття – 36 год., самостійна робота – 40 год., семестровий контроль – 30 год., модульний контроль – 10 год.

Модуль	Змістовний модуль 1										Змістовний модуль 2									
Назва модуля	Диференціальна геометрія										Топологія									
К-сть балів за модуль	223										127									
Лекції	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Теми лекцій	Типи відображень	Вектор-функції	Поняття кривої. Типи кривих. Гладка крива. Аналітична крива.	Властивості плоских кривих.	Кривина плоских кривих. Стичне коло.	Кривина просторових кривих. Скрут.	Дотична, головна нормаль, бінормаль кривої.	Криволінійні поверхні.	Перша квадратична форма	Друга квадратична форма.	Метричні простори.	Відкриті та замкнені множини	Поняття топологічного простору	Відображення просторів	Зв'язність топологічних просторів	Зв'язність та лінійна зв'язність конкретних топологічних просторів.	Теореми та аксіоми	Гомотопії.	Операції на топологічних просторах	Склеювання топологічних просторів
Практичні	1	2	3	4	5	6	7	8	9		10		11		12	13	14		15	
Теми практичних занять	Побудова відображень	Операції з вектор-функціями	Криві на площині, задані у різний спосіб	Обчислення параметрів кривої	Криві в околі точок	Кривина та скрут просторової кривої	Рівняння поверхонь	Перша квадратична форма поверхонь	Друга квадратична форма		Приклади метричних просторів	Приклади метричних просторів	Відображення, гомоморфізми, ізоморфізми	Зв'язність топологічних просторів	Гомотопії просторів	Операції на топологічних просторах				
Бали	2	2	12	2	2	2	2	2	3		3		13		2	2	3		3	
Модульний контроль (бали)	25				25				25		25				25					
Самостійна робота	5										5									
Підсумковий контроль	Екзамен (40)																			

8. Рекомендовані джерела

Основна:

1. Андрійчук В.І., Забавський Б.В. Диференціальна геометрія і топологія // -Львів. -2005.
2. Авдєєва, Т. В. Алгебра. Основи алгебраїчних структур [Електронний ресурс] : навчальний посібник / Т. В. Авдєєва, В. М. Горбачук ; НТУУ «КПІ». – Електронні текстові дані (1 файл: 1,28 Мбайт). – Київ : НТУУ «КПІ», 2015. – 80 с. https://mph.kpi.ua/assets/img/books/FMF/2._Zagalna_Algebra.pdf
3. О. Пришляк Диференціальна геометрія: Курс лекцій. – К.: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2004. – 68 с.
4. Борисенко О.А. Диференціальна геометрія і топологія. – Х., 1995.
5. Лейко С. Г., Диференціальна геометрія. – Одеса : Астропринт, 1999.

Додаткова:

6. Пришляк О.О. Теорія Морса. - К. 2002
7. Топологія. Методичні вказівки. / Упорядн. Кочаровський В.Г., Пришляк О.О. К. 1998.
8. Диференціальна геометрія. Частина I : Метод. посіб. для студентів напряму підготовки 111 «Математика» / І. М. Курбатова. – Одеса :Одес. нац. ун-т ім. І. І. Мечникова, 2020. – 66 с.