Київський університет імені Бориса Грінченка

М.М. Астаф'єва, О.С. Литвин, С.П. Радченко,
Ю.І. Самойленко, С.О. Семеняка

ВИЩА МАТЕМАТИКА: ГОТУЄМОСЬ ДО АТЕСТАЦІЇ

Частина І
ТЕОРЕТИЧНІ МАТЕРІАЛИ

Навчальний посібник
для студентів спеціальності 111 «Математика»
першого (бакалаврського) освітнього рівня

Київ 2022

УДК 51(075.8)
В41

Рекомендовано до друку Вченою радою
Київського університету імені Бориса Грінченка
(*протокол № 6 від 17 червня 2021 р.*)

Авторський колектив:
Астаф'єва М.М., кандидатка фізико-математичних наук, доцентка;
Литвин О.С., кандидатка фізико-математичних наук, старша наукова співробітниця;
Радченко С.П., кандидат фізико-математичних наук, доцент;
Самойленко Ю.І., докторка фізико-математичних наук, професорка;
Семеняка С.О., кандидатка фізико-математичних наук, доцентка.

За загальною редакцією **М.М. Астаф'євої**

Рецензенти:
Бойко В'ячеслав Миколайович, провідний науковий співробітник відділу математичної фізики Інституту математики НАН України, доктор фізико-математичних наук;
Задерей Петро Васильович, професор кафедри математичного аналізу і теорії ймовірностей Національного технічного університету «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», доктор фізико-математичних наук, професор.

В41 **Вища математика:** готуємось до атестації. Частина І. Теоретичні матеріали: навч. посібник / М.М. Астаф'єва, О.С. Литвин, С.П. Радченко, Ю.І. Самойленко, С.О. Семеняка; за заг. ред. М.М. Астаф'євої. — К. : Київ. ун-т ім. Б. Грінченка, 2022. — 176 с.
ISBN 978-617-658-042-3

Посібник містить змістову частину програми комплексного екзамену з вищої математики підсумкової атестації студентів першого (бакалаврського) освітнього рівня спеціальності 111 «Математика»; результати навчання, досягнення яких перевіряється на комплексному екзамені; теоретичний матеріал з окремих тем чотирьох блоків математичних дисциплін: алгебри, геометрії, математичного аналізу та диференціальних рівнянь.

Посібник призначений для студентів першого (бакалаврського) освітнього рівня спеціальності 111 «Математика» і спрямований на те, щоб допомогти у підготовці до підсумкової атестації з вищої математики.

УДК 51(075.8)

ISBN 978-617-658-042-3

Зміст

Передмова

Запропонований посібник містить змістову частину програми комплексного екзамену з вищої математики підсумкової атестації студентів першого (бакалаврського) освітнього рівня спеціальності 111 «Математика» та теоретичний матеріал з окремих тем тих математичних дисциплін, які до неї включені. Поданий матеріал — це як можливий варіант відповіді студента на екзамені. Такі змодельовані відповіді можуть служити тому, хто екзаменується, певним орієнтиром щодо планування та побудови своєї відповіді. Зокрема, як виділяти головне, інтегрувати, систематизувати й узагальнювати факти, які вивчалися в різних темах, а то й у різних дисциплінах, щоб за обмежений час вибудувати аргументовану, цілісну, повну й логічну відповідь на досить широке питання. Зазначимо, що, будуючи свою відповідь на теоретичне питання, яке охоплює багато важливих фактів, студент не повинен усі їх доводити, достатньо довести одну-дві теореми (залежно від того, наскільки ці доведення громіздкі) на власний вибір, якщо немає завдання довести ту чи іншу конкретну теорему. Стосовно інших фактів — можна обмежитися ідеєю доведення, геометричною ілюстрацією тощо. Щоб забезпечити можливість такого вибору, більшість наведених у посібнику варіантів відповідей містять доведення багатьох теорем.

Автори сподіваються, що посібник стане у пригоді студентам-математикам при підготовці до підсумкової атестації. Він може бути корисним також студентам математичної спеціальності під час вивчення наступних дисциплін: лінійної алгебри, вищої алгебри та теорії чисел; аналітичної, конструктивної, проєктивної та диференціальної геометрій; математичного аналізу; комплексного аналізу; диференціальних рівнянь.

Інформація про авторство матеріалів другого розділу («Приклади відповідей на теоретичні питання») наведена у таблиці.

2.1. Алгебра	
2.1.1. Лінійні (векторні) простори, підпростори. Базис і розмірність скінченновимірного векторного простору	С.П. Радченко
2.1.2. Основна теорема алгебри та наслідки з неї	С.П. Радченко
2.2. Геометрія	
2.2.1. Прямі та площини у просторі: рівняння, взаємне розміщення	С.П. Радченко
2.2.2. Гладкі криві. Природна параметризація лінії. Кривина кривої	С.П. Радченко
2.2.3. Проєктивні координати	О.С. Литвин
2.2.4. Принцип двоїстості в проєктивному просторі	О.С. Литвин
2.3. Математичний аналіз	
2.3.1. Границя послідовності дійсних чисел	М.М. Астаф'єва
2.3.2. Ознаки збіжності дійсних числових рядів	М.М. Астаф'єва
2.3.3. Показникова та логарифмічна функції дійсної й комплексної змінної: означення, властивості	М.М. Астаф'єва Ю.І. Самойленко
2.3.4. Незалежність криволінійного інтеграла від форми шляху інтегрування	М.М. Астаф'єва
2.3.5. Голоморфні функції. Гармонічні функції	Ю.І. Самойленко
2.3.6. Степеневі ряди з дійсними та комплексними членами. Множина (область) і радіус збіжності степеневого ряду	М.М. Астаф'єва Ю.І. Самойленко
2.3.7. Розклад голоморфної функції в степеневий ряд. Теорема Ліувілля	Ю.І. Самойленко
2.3.8. Нулі голоморфних функцій. Ряд Лорана	Ю.І. Самойленко
2.3.9. Лишки, теореми про суму лишків	Ю.І. Самойленко
2.4. Диференціальні рівняння	
2.4.1. Умови існування і єдиності розв'язку задачі Коші для диференціального рівняння першого порядку	М.М. Астаф'єва
2.4.2. Стійкість лінійних систем диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами	С.О. Семеняка

Розділ 1. ЗМІСТОВА ЧАСТИНА ПРОГРАМИ КОМПЛЕКСНОГО ЕКЗАМЕНУ З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

1.1. Теми, що виносяться на екзамен

Програма комплексного екзамену з вищої математики містить основні питання з фундаментальних та фахових математичних дисциплін: лінійної алгебри, вищої алгебри та теорії чисел; аналітичної, конструктивної та диференціальної геометрії; математичного та комплексного аналізу; диференціальних рівнянь. У програмі вони об'єднані в чотири розділи: «Алгебра», «Геометрія», «Математичний аналіз», «Диференціальні рівняння».

Алгебра

1. Натуральні числа (аксіоми Пеано). Принцип математичної індукції, різні форми індукції.
2. Групи, приклади груп, найпростіші властивості груп. Підгрупи: означення і критерій.
3. Кільце, підкільце: означення і критерій, найпростіші властивості.
4. Поле, підполе. Найпростіші властивості поля.
5. Поле комплексних чисел. Алгебраїчна та тригонометрична форми комплексного числа.
6. Системи лінійних рівнянь. Критерій сумісності і визначеності системи лінійних рівнянь. Розв'язування систем лінійних рівнянь методом послідовного виключення невідомих.

7. Арифметичний n-вимірний векторний простір. Лінійна залежність і лінійна незалежність системи векторів. Ранг і базис системи векторів.

8. Існування ненульових розв'язків системи лінійних однорідних рівнянь. Фундаментальна система розв'язків системи лінійних однорідних рівнянь, її побудова.

9. Обернена матриця. Розв'язування системи лінійних рівнянь матричним способом. Формули Крамера.

10. Векторні простори, підпростори. Базис і розмірність скінченновимірного векторного простору.

11. Лінійні оператори. Матриця лінійного оператора. Власні значення і власні вектори. Теорема про зв'язок характеристичних чисел і власних значень лінійного оператора. Зведення матриці до діагонального вигляду.

12. Теорема про ділення з остачею в кільці цілих чисел. НСД і НСК двох чисел і зв'язок між ними. Алгоритм Евкліда.

13. Прості числа. Нескінченність множини простих чисел. Канонічний розклад складеного числа у вигляді добутку простих чисел та єдиність такого розкладу. Канонічний запис та застосування такого запису до знаходження НСД і НСК чисел.

14. Означення й основні властивості конгруентності цілих чисел. Повна і зведена система лишків, їх властивості. Теореми Ейлера і Ферма.

15. Лінійні конгруенції з одним невідомим, теорема про число розв'язків. Способи розв'язування лінійних конгруенцій.

16. Многочлени над полем. Теорема про ділення з остачею. НСД двох многочленів. Алгоритм Евкліда.

17. Основна теорема алгебри та наслідки з неї.

18. Многочлени з дійсними коефіцієнтами. Спряженість уявних коренів таких многочленів. Незвідні над полем дійсних чисел многочлени та канонічний розклад многочленів над полем дійсних чисел.

19. Многочлени над полем раціональних чисел. Цілі й раціональні корені многочлена з цілими коефіцієнтами. Незвідні над полем раціональних чисел многочлени.

Геометрія

1. Різні види систем координат на площині. Геометричний зміст координат точки. Теорія прямих на площині (в аналітичному викладі).

2. Еліпс, гіпербола, парабола, їх канонічні рівняння і властивості. Класифікація алгебраїчних кривих 2-го порядку на евклідовій площині.

3. Теорія прямих у просторі. Кут між прямими (в аналітичному викладі).

4. Теорія площин у просторі. Кут між площинами. Відстань від точки до площини (в аналітичному викладі).

5. Взаємне розміщення двох площин, прямої і площини та двох прямих у просторі (в аналітичному викладі).

6. Елементи векторної алгебри в тривимірному евклідовому просторі. Скалярний, векторний і мішаний добутки векторів, їх властивості й застосування.

7. Поверхні обертання. Циліндричні та конічні поверхні (в аналітичному викладі).

8. Еліпсоїд, гіперболоїди і параболоїди (в аналітичному викладі).

9. Група рухів площини, їх аналітичний запис і класифікація. Основні підгрупи. Застосування рухів до розв’язування задач.

10. Група перетворень подібності площини і її підгрупи. Подібність фігур. Застосування перетворень подібності до розв’язування задач.

11. Проєктивні координати точки і прямої. Проєктивні перетворення простору.

12. Основні теореми проєктивної геометрії: Дезарга, про гармонічні властивості чотиривершинника, Паскаля та Бріаншона, їх застосування до розв’язування задач на побудову.

13. Аксіома паралельності й площина Лобачевського. Взаємне розміщення прямих на площині Лобачевського. Властивості паралельних і розбіжних прямих. Несуперечливість системи аксіом площини Лобачевського.

14. Огляд теорії вимірювання (довжин відрізків, площ многокутників, об’ємів многогранників).

15. Гладкі криві. Природна параметризація лінії. Кривина кривої.

16. Скрут кривої. Тригранник Френе.

17. Гладкі поверхні в евклідовому просторі. Перша квадратична форма поверхні та її застосування. Поняття про внутрішню геометрію поверхні.

18. Топологічне перетворення. Ейлерова характеристика замкнених поверхонь. Теорема Ейлера для многогранників.

Математичний аналіз

1. Числові множини. Межі, точні межі числової множини. Множини натуральних (N), цілих (Z), раціональних (Q), дійсних (R) та комплексних (C) чисел, їх властивості.

2. Поняття числової послідовності. Границя послідовності. Основні властивості границь. Границя обмеженої монотонної послідовності. Число e.

3. Поняття функції однієї змінної. Границя функції в точці. Властивості границь. Деякі важливі границі.

4. Поняття функції багатьох змінних (на прикладі функції двох змінних). Границя функції в точці. Повторні границі.

5. Неперервність у точці функцій дійсної змінної. Властивості неперервних функцій. Властивості функцій, неперервних на відрізку.

6. Неперервність функцій кількох змінних та функцій комплексної змінної. Властивості функцій, неперервних в обмеженій замкненій множині.

7. Поняття похідної для функції дійсної змінної. Диференційовність функції в точці, необхідні та достатні умови диференційовності. Правила диференціювання.

8. Похідні основних елементарних функцій. Похідна функції комплексної змінної. Голоморфні функції.

9. Теореми Ролля, Лагранжа, Коші.

10. Умови сталості і монотонності функцій однієї змінної. Екстремуми функцій однієї змінної. Необхідні та достатні умови існування екстремуму. Напрями опуклості та точки перегину. Асимптоти.

11. Поняття диференційовності функції багатьох змінних. Диференціал та частинні похідні. Екстремум функцій багатьох змінних. Необхідні та достатні умови існування екстремуму.

12. Первісна та її властивості. Невизначений інтеграл. Основні методи інтегрування.

13. Інтеграл Рімана для функції однієї змінної. Необхідні та достатні умови інтегровності функцій однієї змінної. Основні методи обчислення інтегралів. Застосування інтеграла до розв'язування задач геометрії та фізики.

14. Інтеграли Рімана для функцій двох та трьох змінних (означення, умови існування та обчислення). Застосування подвійних і потрійних інтегралів до розв'язування задач геометрії та фізики.

15. Поняття криволінійного інтеграла для функції дійсної змінної та комплексної змінної. Властивості, обчислення та застосування криволінійних інтегралів.

16. Показникова функція дійсної та комплексної змінних (означення, властивості).

17. Логарифмічна функція дійсної та комплексної змінних (означення, властивості).

18. Тригонометричні та обернені тригонометричні функції дійсної та комплексної змінних (означення, властивості).

19. Числові ряди з дійсними та комплексними членами. Основні поняття. Геометрична прогресія та гармонічний ряд. Властивості збіжних рядів.

20. Ознаки збіжності додатних числових рядів. Абсолютно та умовно збіжні ряди, їх властивості. Знакозмінні ряди, їх збіжність. Ряд Лейбніца.

21. Степеневі ряди з дійсними та комплексними членами. Інтервал (круг) та радіус збіжності.

22. Розвинення в степеневий ряд основних елементарних функцій. Застосування степеневих рядів до наближених обчислень. Формули Ейлера.

23. Ряди Фур'є.

24. Лишки, формули для обчислень лишків в ізольованих особливих точках. Теореми Коші про суму лишків та їх застосування при обчисленні визначених інтегралів.

Диференціальні рівняння

1. Основні поняття теорії диференціальних рівнянь:

— поняття диференціального рівняння, звичайного диференціального рівняння, його розв'язку; інтегральна крива;

— порядок диференціального рівняння;

— диференціальні рівняння та математичне моделювання; приклади задач, які приводять до диференціальних рівнянь;

— поле напрямів; ізокліни.

2. Умови існування і єдиності розв'язку задачі Коші для диференціального рівняння першого порядку:

— загальний та частинний розв'язки диференціального рівняння; задача Коші; геометричний зміст початкових умов для диференціальних рівнянь першого та другого порядків;

— теорема існування і єдиності розв'язку задачі Коші для нормального диференціального рівняння 1-го порядку;

— поняття про особливий розв'язок диференціального рівняння.

3. Диференціальні рівняння першого порядку, які інтегруються в квадратурах:

— диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними та звідні до них;

— однорідні та квазіоднорідні диференціальні рівняння;

— лінійні диференціальні рівняння; рівняння Бернуллі;

— диференціальні рівняння в повних диференціалах; інтегрувальний множник.

4. Диференціальні рівняння першого порядку, не розв’язані відносно похідної:

— основні поняття; теорема про існування та єдність розв’язку задачі Коші;

— найпростіші типи диференціальних рівнянь першого порядку, не розв’язаних відносно похідної;

— рівняння Лагранжа і Клеро;

— особливі розв’язки, умови їх існування; дискримінантна крива; обвідна.

5. Інтегрування диференціальних рівнянь вищих порядків:

— основні поняття: загальний вигляд диференціального рівняння n-го порядку, його розв’язок; загальний, частинний розв’язки; початкові умови, задача Коші;

— теорема про існування і єдиність розв’язку задачі Коші;

— інтегрування та зниження порядку деяких типів диференціальних рівнянь вищих порядків.

6. Загальна теорія лінійних диференціальних рівнянь n-го порядку:

— теорема про існування та єдиність розв’язку задачі Коші;

— лінійна залежність та незалежність системи функцій, визначник Вронського;

— розв’язки лінійного однорідного рівняння, їх властивості;

— фундаментальна система розв’язків, її існування;

— властивість вронскіана системи розв’язків лінійного однорідного рівняння; теорема про загальний розв’язок лінійного однорідного рівняння;

— формула Остроградського-Ліувілля.

7. Лінійні однорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами:

— характеристичне рівняння;

— вигляд частинних розв’язків лінійного однорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами у випадках: а) усі корені характеристичного рівняння прості дійсні; б) серед коренів характеристичного рівняння є комплексно-спряжені; в) характеристичне рівняння має кратні корені;

— загальний розв’язок лінійного однорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами.

8. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами:

— структура загального розв’язку лінійного неоднорідного рівняння;

— метод варіації довільних сталих;

— лінійне рівняння зі спеціальною (у вигляді квазіполінома) правою частиною; відшукання частинного розв’язку методом невизначених коефіцієнтів (нерезонансний та резонансний випадки);

— математичні моделі на основі лінійних диференціальних рівнянь другого порядку.

9. Системи звичайних диференціальних рівнянь:

— загальні поняття про системи звичайних диференціальних рівнянь: означення, порядок; канонічна, векторна, нормальна (автономна, неавтономна) форми; розв’язок і його геометрична та кінематична інтерпретація;

— теорема існування і єдиності розв’язку задачі Коші для нормальних систем диференціальних рівнянь;

— системи лінійних диференціальних рівнянь (однорідні та неоднорідні), структура загального розв’язку лінійної однорідної системи рівнянь;

— системи лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами та методи їх розв’язування: метод зведення системи до одного скалярного рівняння, метод Ейлера;

— стійкість лінійних систем диференціальних рівнянь: означення (асимптотичної) стійкості за Ляпуновим, критерій стійкості (асимптотичної стійкості) лінійних систем диференціальних рівнянь, класифікація точок спокою та геометричне представлення фазових кривих системи.

1.2. Результати навчання

Під час екзамену студент повинен показати загальне розуміння відповідної математичної теорії, демонструвати свідоме володіння математичними поняттями, розуміння взаємозв'язків і органічної єдності понять, фактів, уміння доказово аргументувати, наводити приклади і контрприклади, ілюстрації, здатність застосувати теоретичні знання до розв'язування задач, володіння стандартними методами, прийомами, алгоритмами, а також спроможність інтегрувати, систематизувати й узагальнювати інформацію, вибудувати цілісну, повну й логічну відповідь. Результати по кожному блокові програми наведені нижче.

Алгебра

Екзаменовані повинні володіти теоретико-множинною і логічною символікою, основними поняттями алгебри і теорії чисел (алгебраїчна операція, група, кільце, поле, векторний простір, лінійна залежність і незалежність, лінійні оператори, матриці і визначники, прості числа, подільність, конгруентність, многочлени), мати чітке уявлення про основні числові системи і їх будову, володіти навичками розв'язування систем лінійних рівнянь, знати основні арифметичні застосування теорії конгруенцій.

Геометрія

Екзаменовані повинні володіти методами аналітичної геометрії, бути ознайомленими як з груповою, так і з структурною точкою зору на геометрію, з сучасним аксіоматичним методом, основними фактами геометрії Лобачевського, проєктивної геометрії, мати загальні уявлення про різні неевклідові геометрії, використовувати знання топології при означенні ліній і поверхонь, вміти застосовувати теоретичні знання на практиці, зокрема до доведення теорем і розв'язування задач. Це означає, що при відповіді студенти повинні продемонструвати достатньо широкий та системний погляд на геометрію.

Математичний аналіз

Екзаменовані повинні володіти основними поняттями математичного аналізу (функція, послідовність, ряд, границя, неперервність, похідна, інтеграл); мати уявлення про метричний простір та основні елементарні функції дійсної й комплексної змінної; володіти навичками обчислення границь, похідних, інтегралів; знати застосування диференціального та інтегрального числення до розв'язування практичних задач.

Диференціальні рівняння

Екзаменовані повинні володіти основними поняттями теорії звичайних диференціальних рівнянь, знаннями умов існування та єдиності розв'язку задачі Коші, властивостей розв'язків лінійних рівнянь та систем, уміннями розв'язувати звичайні диференціальні рівняння першого порядку, що інтегруються в квадратурах, найпростіші диференціальні рівняння першого порядку, не розв'язані відносно похідної, зокрема рівняння Лагранжа та Клеро, лінійні диференціальні рівняння вищих порядків, здатністю вирізняти з-поміж інших природні, фізичні, економічні та інші динамічні явища і процеси, для моделювання яких можуть бути використані диференціальні рівняння, здатністю розробляти моделі таких процесів, аналізувати і трактувати розв'язок.

Розділ 2. ПРИКЛАДИ ВІДПОВІДЕЙ НА ТЕОРЕТИЧНІ ПИТАННЯ

2.1. Алгебра

2.1.1. Лінійні (векторні) простори, підпростори. Базис і розмірність скінченновимірного векторного простору

(Означення лінійного (векторного) простору. Базис та розмірність лінійного простору. Теореми про базис)

Є різні підходи до визначення поняття лінійного простору і різні моделі лінійних просторів. Найпростішим прикладом лінійних просторів є тривимірний векторний евклідів простір, на якому, наприклад, ґрунтується значна кількість результатів аналітичної геометрії. Слід зазначити, що лінійні простори можуть складатися з елементів різної природи, не обов'язково «геометричних» векторів. Наприклад, — з неперервних на відрізку функцій чи матриць заданої розмірності. Важливо тільки, щоб вони (ці елементи) володіли певними властивостями.

А. Що таке лінійний (або векторний) простір?

Означення 2.1.1. Кажуть, що множина P утворює лінійний (або векторний) простір над полем F, якщо у цій множині визначена бінарна операція $P \times P \to P$ «додавання (+)» (тобто для будь-яких двох елементів $a, b \in P$ існує елемент $a + b$, який називається їх сумою, і $a + b \in P$), а також унарна операція $F \times P \to P$

«множення (·)» (тобто для будь-якого елемента $a \in P$ та будь-якого елемента $\alpha \in F$ існує їх добуток $\alpha \cdot a$ (чи αa) і $\alpha \cdot a \in P$). За такої умови справджуються такі властивості (аксіоми):

1. $a+b=b+a \ \forall a,b \in P$;
2. $a+(b+c)=(a+b)+c \ \forall a,b,c \in P$;
3. $\exists \theta \in P : a+\theta = a \ \forall a \in P$ (елемент θ називається *нулем простору P*);
4. $\forall a \in P \ \exists(-a) \in P : a+(-a)=\theta$ (елемент «$-a$» називається протилежним до елемента a;
5. $\forall a \in P : 1 \cdot a = a$, де 1 — одиниця (за «множенням») поля F;
6. $\alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a \ \forall a \in P$ і $\forall \alpha, \beta \in F$;
7. $\alpha(a+b) = \alpha a + \alpha b \ \forall a,b \in P$ і $\forall \alpha \in F$;
8. $(\alpha+\beta)a = \alpha a + \beta a \ \forall a \in P$ і $\forall \alpha, \beta \in F$.

Елементи лінійного простору (незалежно від їх природи) називаються векторами. Найчастіше полем F, над яким розглядають лінійні простори, є поле дійсних або раціональних чисел.

Б. Лінійна залежність (незалежність) елементів лінійного простору

Поняття лінійної залежності з'являється при вивченні геометричних векторів. При побудові геометричних просторів використовують систему лінійно незалежних векторів. Формалізація цього поняття дає можливість застосувати властивість лінійної залежності для елементів довільного лінійного векторного простору.

Означення 2.1.2. Сукупність елементів (векторів) $a_1; a_2; \ldots ; a_n$ лінійного простору P над полем F називається *лінійно залежною*, якщо існують елементи (числа) $\lambda_1; \lambda_2; \ldots ; \lambda_n$ з поля F, серед яких не всі дорівнюють нулю цього поля, такі, при яких справджується співвідношення $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_n a_n = \theta$, де θ — нуль лінійного простору P.

Означення 2.1.3. Сукупність елементів (векторів) $a_1; a_2; \ldots; a_n$ лінійного простору P над полем F називається *лінійно незалежною*, якщо вона не є лінійно залежною.

Інакше кажучи, якщо співвідношення $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_n a_n = \theta$ виконується лише за умови, що **всі** елементи $\lambda_1; \lambda_2; \ldots ; \lambda_n$ з поля F дорівнюють нулю.

Означення 2.1.4. Лінійний простір P називається *n-вимірним*, якщо у ньому можна знайти хоча б одну сукупність n лінійно незалежних векторів, а будь-яка сукупність елементів, кількість яких перевищує n, є лінійно залежною.

В. Базис лінійного простору

Означення 2.1.5. Сукупність (якщо вона існує) n лінійно незалежних елементів (векторів) $a_1; a_2; \ldots ; a_n$ лінійного простору P називається *базисом* простору P, якщо кожна сукупність, яка налічує більше ніж n елементів цього простору, є лінійно залежною.

Означення 2.1.6. Лінійний простір називається *скінченновимірним*, якщо він має скінченний базис.

Означення 2.1.7. Кількість елементів базису скінченновимірного простору називається його *розмірністю*.

Виявляється, що є зв'язок між елементами лінійного простору й елементами базису цього простору.

Теорема 2.1.1

Будь-який елемент лінійного n-вимірного простору з базисом $a_1; a_2; \ldots ; a_n$ може бути поданий у вигляді лінійної комбінації $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_n a_n$ елементів цього базису.

Доведення. Нехай x — деякий елемент лінійного n-вимірного простору з базисом $a_1; a_2; \ldots ; a_n$. Розглянемо таку сукупність елементів цього лінійного простору $a_1; a_2; \ldots ; a_n; x$.

Ця система елементів є лінійно залежною, оскільки складається з $n + 1$ елементів. Це означає, що в полі F існують елементи $\mu_1; \mu_2; \dots; \mu_n; \mu_{n+1}$, не всі рівні нулеві, такі, що виконується рівність:

$$\mu_1 a_1 + \mu_2 a_2 + \dots + \mu_n a_n + \mu_{n+1} x = \theta \qquad (2.1.1)$$

Звідси робимо висновок, що $\mu_{n+1} \neq 0$. Справді, якщо припустити, що $\mu_{n+1} = 0$, то й $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_n = 0$, бо рівність $\mu_1 a_1 + \mu_2 a_2 + \dots + \mu_n a_n = \theta$ інакше не може виконуватися, оскільки елементи $a_1; a_2; \dots; a_n$ утворюють базис, тобто є лінійно незалежними. Тоді мусимо визнати, що рівність (2.1.1) можлива лише за умови, що $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_n = \mu_{n+1} = 0$, а це означає лінійну незалежність елементів $a_1; a_2; \dots; a_n; x$ лінійного простору. Це суперечить умові про те, що простір n-вимірний. Отже, $\mu_{n+1} \neq 0$. Поділимо обидві частини рівності (2.1.1) на μ_{n+1}:

$$\frac{\mu_1}{\mu_{n+1}} a_1 + \frac{\mu_2}{\mu_{n+1}} a_2 + \dots + \frac{\mu_n}{\mu_{n+1}} a_n + x = \theta.$$

Позначивши $\lambda_i = -\dfrac{\mu_i}{\mu_{n+1}}$, де $i = 1, 2, \dots, n$, із останньої рівності отримаємо:

$$x = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n .$$

Отже, елемент x поданий у вигляді лінійної комбінації елементів базису.

Теорему доведено.

Можна довести єдиність такого розкладу елемента x у заданому базисі. Тому для елементів лінійного простору P вводять поняття координат як упорядкованих кортежів чисел з поля F.

Має місце й обернене твердження до теореми 2.1.1.

Теорема 2.1.2

Якщо будь-який елемент лінійного простору може бути поданий у вигляді лінійної комбінації $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_n a_n$ лінійно незалежних елементів $a_1; a_2; \ldots ; a_n$ цього простору, то система цих елементів є базисом лінійного n-вимірного простору.

Доведення. В умові теореми не сказано нічого про розмірність лінійного простору. Тому, щоб встановити, що система елементів $a_1; a_2; \ldots ; a_n$ утворює базис, доведемо спочатку, що його розмірність дорівнює рівно n.

Із наведених вище означень та умови теореми випливає, що розмірність нашого лінійного простору дорівнює n тільки у тому випадку, коли будь-яка система $n + 1$ елементів цього простору є лінійно залежною. Візьмемо довільно $n + 1$ елементів $x_1; x_2; \ldots; x_n; x_{n+1}$ лінійного простору. Тоді згідно з умовою теореми можемо записати систему рівностей:

$$\lambda_{1i} a_1 + \lambda_{2i} a_2 + \ldots + \lambda_{ni} a_n = x_i \text{, де } i = 1, 2, \ldots, n+1 .$$

Ранг відповідної матриці $A = \left(\lambda_{is}\right)$ цієї системи не може перевищувати n, оскільки $n + 1 > n$. Отже, сукупність її стовпчиків є лінійно залежною. А це означає, що один з них може бути лінійною комбінацією інших.

Теорему доведено.

Теорема 2.1.3

Будь-яка сукупність лінійно незалежних елементів скінченновимірного лінійного простору P є підмножиною деякого базису цього простору.

Доведення. Нехай простір P — скінченновимірний. І нехай $a_1; a_2; \ldots; a_s$ — деяка сукупність лінійно незалежних елементів цього простору. Множина всіх лінійних комбінацій

$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + ... + \lambda_s a_s$ з цих елементів і всіх можливих чисел з поля *F* утворюють лінійний простір P_s, який є, очевидно, підпростором простору *P*. Його розмірність — *s*. Якщо $P_s \equiv P$, то $a_1; a_2; ...; a_s$ — базис простору *P*, а *s* — його розмірність. Тобто, коли кожен елемент простору *P* є лінійною комбінацією типу $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + ... + \lambda_s a_s$. Якщо ж знайдеться елемент $a_{s+1} \in P$ такий, що сукупність елементів $a_1; a_2; ...; a_s; a_{s+1}$ є лінійно незалежною, то $P_s \subset P$, а $P_{s+1} \subseteq P$. Чи збіжиться з ним підмножина P_{s+1} простору *P* залежить від того, чи знайдеться в цьому просторі елемент a_{s+2} такий, що сукупність елементів $a_1; a_2; ...; a_s; a_{s+1}; a_{s+2}$ буде лінійно незалежною. Якщо ні, то $P_{s+1} \equiv P$; якщо так, то процес «поповнення» лінійно незалежної сукупності елементів простору *P* потрібно буде продовжити. Цей процес не може бути нескінченним, оскільки простір *P* скінченновимірний. Його розмірність ми можемо дізнатися, коли процес «поповнення» буде завершено.

Нехай P_n — підмножина простору *P*, у якій будь-який елемент *P* є деякою лінійною комбінацією типу $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + ... + \lambda_n a_n$. Тоді $P_n \equiv P$, а сукупність елементів $a_1; a_2; ...; a_s; a_{s+1}; a_{s+2}; ...; a_n$ — базис векторного простору. Отже, $a_1; a_2; ...; a_s$ — підмножина базису $a_1; a_2; ...; a_n$.

Теорему доведено.

Теорема 2.1. важлива тим, що вона вказує не тільки на можливість існування різних базисів, але й на спосіб побудови якогось певного базису шляхом збільшення кількості елементів лінійно незалежної сукупності елементів простору.

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. У деякому векторному просторі L знайдено 5 лінійно незалежних векторів. Чи можна стверджувати, що цей простір скінченновимірний та розмірність цього простору дорівнює п'яти?
2. Чи утворюють лінійний векторний простір розв'язки системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + 18x_2 + 2x_3 = 0, \\ 33x_1 - 596x_2 + 77x_3 = 0, \\ -66x_1 + 1192x_2 - 154x_3 = 0. \end{cases}$$

3. Задані три вектори $\vec{a} = \{1;-9;3\}$; $\vec{b} = \{-7;63;-21\}$; $\vec{c} = \{7;23;-21\}$. Чи утворюють вони базис тривимірного лінійного векторного простору?
4. Нехай $a_1, a_2, ..., a_n$ — лінійно незалежна сукупність векторів. Чи утворює лінійний векторний простір множина всіх векторів $\vec{a}$, заданих лінійною комбінацією $\vec{a} = \mu_1 a_1 + \mu_2 a_2 + ... + \mu_n a_n$, де $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n$ — раціональні числа?
6. Які дві умови має задовольняти матриця, щоб вона мала обернену матрицю?
7. Визначник матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 47 & -7 \\ -15 & -703 & 205 \\ -11 & -499 & 973 \end{pmatrix}$ дорівнює «–8», а визначник матриці $B = \begin{pmatrix} 1 & -17 & 15 \\ -9 & 155 & -145 \\ 26 & -428 & 323 \end{pmatrix}$ дорівнює «6». Обчисліть визначник матриці $C = A \times B$.

8. Скільки розв'язків має система

$$\begin{cases} x_1 + 18x_2 + 2x_3 = 0, \\ 33x_1 - 596x_2 + 77x_3 = 0, \\ -66x_1 + 1192x_2 - 154x_3 = 0. \end{cases} \quad ?$$

9. Чому дорівнює ранг матриці A, яка складається з чотирьох рядків та шести стовпчиків, якщо один з нерівних нулю мінорів цієї матриці має четвертий порядок? Поясніть відповідь.

2.1.2. Основна теорема алгебри та наслідки з неї

(Основна теорема алгебри та наслідки з неї. Розклад полінома на лінійні множники)

Теорема 2.1.4 *(основна теорема алгебри)*

Будь-який поліном, степінь якого не менший за одиницю, має хоча б один корінь, у загальному випадку — комплексний.

Ця теорема має велике значення в математиці. Вона, зокрема, є головною відповіддю на питання про існування коренів алгебраїчних рівнянь.
Сформулюємо і доведемо деякі наслідки з неї.

Наслідок 1. Будь-який поліном $P(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \ldots + a_1 t + a_0$ степеня $n > 1$ з комплексними коефіцієнтами $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$, де $a_n \neq 0$, можна подати у вигляді добутку лінійних двочленів, тобто:

$$a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \ldots + a_1 t + a_0 = a_n (t - t_1)^{s_1} (t - t_2)^{s_2} \cdot \ldots \cdot (t - t_q)^{s_q},$$

де $t_1, t_2, \ldots, t_q$ — корені полінома кратності $s_1, s_2, \ldots, s_q$ відповідно, причому $s_1 + s_2 + \ldots + s_q = n$.

Інакше кажучи, поліном n-го степеня має рівно n коренів, якщо кожен корінь рахувати стільки разів, яка його кратність.

Доведення. Доведемо твердження методом математичної індукції. При $n = 1$ твердження очевидно виконується: рівняння $a_n t + a_{n-1} = 0$ має єдиний корінь $t = -\dfrac{a_{n-1}}{a_n}$. Припустимо, що воно правильне при $n - 1$, і покажемо, що з цього випливатиме його справедливість й для n.

За основною теоремою алгебри, $P(t)$ має принаймні один корінь, нехай він дорівнює α_1. Тоді $P(t)=\left(t-\alpha_1\right)Q\left(t\right)$, де $Q(t)$ — поліном $(n-1)$-го степеня зі старшим коефіцієнтом $a_n \neq 0$. Оскільки для полінома $(n-1)$-го степеня за припущенням твердження справедливе, то поліном $Q(t)$ можна записати у вигляді $Q(t)=a_n\left(t-\alpha_2\right)...\left(t-\alpha_n\right)$, де $\alpha_2,...,\alpha_n$ — його корені (серед них можуть бути й рівні між собою). Підставляючи записаний розклад $Q(t)$ у попередню рівність, одержимо: $P(t)=a_n\left(t-\alpha_1\right)\left(t-\alpha_2\right)...\left(t-\alpha_n\right)$, що й треба було довести. Числа $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ — корені полінома, бо кожне із них перетворює в нуль котрийсь із множників розкладу. Інших коренів поліном не має, бо ніяке інше число, відмінне від зазначених, не перетворює в нуль жоден із цих множників, а отже, й сам поліном.

Наслідок доведено.

Наслідок 2. Якщо поліноми *P(t)* і *R(t)*, степені яких не перевищують *n*, мають рівні значення більше, ніж при n різних значеннях змінної *t*, то ці поліноми тотожно рівні.

Доведення. Справді, за умовою, поліном *P(t) – R(t)* має більше, ніж n коренів, хоча його степінь не перевищує *n*, що суперечить *наслідку 1* з основної теореми алгебри. Отже, це поліном нульового степеня, тобто $P(t) - R(t) = a_0$. Оскільки він має принаймні один корінь, то $a_0 = 0$. Отже, $P(t) - R(t) = 0$, тобто $P(t) = R(t)$.

Твердження доведено.

Розглянемо поліном з дійсними коефіцієнтами:

$$F(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0 .$$

Розклад його на лінійні двочлени згідно з *наслідком 1* має вигляд:

$$F(x) = a_n (x - x_1)^{s_1} (x - x_2)^{s_2} \dots (x - x_q)^{s_q},$$

де $x_1, x_2, \dots, x_q$ — корені полінома (зокрема комплексні), $s_1 + s_2 + \dots + s_q = n$.

Наслідок 3. Якщо комплексне (з ненульовою уявною частиною) число c — корінь полінома $F(x)$ з дійсними коефіцієнтами, то спряжене число $\overline{c}$ також є його коренем тієї ж кратності.

Доведення. За умовою, c — корінь полінома $F(x)$, тобто $F(x) = 0$. А оскільки $F(\overline{c}) = \overline{F(c)} = \overline{0} = 0$, то $\overline{c}$ — корінь полінома $F(x)$. Однакова кратність коренів c та $\overline{c}$ очевидно випливає з того, що, якщо число α є коренем полінома $F(x)$ кратності s, то:

$$F(\alpha) = 0, F'(\alpha) = 0, \dots, F^{(s-1)}(\alpha) = 0, F^{(s)}(\alpha) \neq 0.$$

Наслідок 4. Будь-який поліном $F(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ з дійсними коефіцієнтами може бути поданий у вигляді добутку лінійних двочленів та квадратних тричленів, які не мають дійсних коренів (тобто дискримінанти яких від'ємні).

Доведення. Оскільки, згідно із *наслідком 3*, комплексні корені полінома «ходять» парами, то якщо поліном має комплексний (із ненульовою уявною частиною) корінь c, він має й корінь $\overline{c}$. Тому розклад полінома на множники містить добуток:

$$(x - c) \cdot (x - \overline{c}) = x^2 - (\overline{c} + c) \cdot x + \overline{c} \cdot c.$$

Ураховуючи, що сума $(\overline{c} + c)$ та добуток $(\overline{c} \cdot c)$ спряжених чисел є дійсними числами, права частина останньої рівності є квадратним тричленом з дійсними коефіцієнтами. Причому, оскільки $\overline{c} \neq c$, то дискримінант цього квадратного тричлена від'ємний. Таким чином, можемо стверджувати, що:

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = a_n \cdot \left(x - x_1\right)^{s_1} \cdot \left(x - x_2\right)^{s_2} \cdot \ldots \cdot \left(x - x_q\right)^{s_q} \times$$

$$\times \left(x^2 + r_1 x + u_1\right)^{w_1} \cdot \left(x^2 + r_2 x + u_2\right)^{w_2} \cdot \ldots \cdot \left(x^2 + r_k x + u_k\right)^{w_k},$$

де $x_1, x_2, \ldots, x_q$ — дійсні корені полінома кратності, відповідно

$s_1, s_2, \ldots, s_q$, $s_1 + s_2 + \ldots + s_q + 2w_1 + 2w_2 + \ldots + 2w_k = n$.

Твердження доведено.

Наслідок 5. Поліном непарного степеня з дійсними коефіцієнтами завжди має хоча б один дійсний корінь.

Твердження безпосередньо випливає з *наслідку 3*.

Поліном же парного степеня з дійсними коефіцієнтами може не мати дійсних коренів. При цьому в його розкладі будуть відсутні лінійні двочлени $\left(x - x_1\right), \left(x - x_2\right), \ldots, \left(x - x_q\right)$.

Приклад застосування. Розкласти на множники над полем дійсних чисел поліном:

$$F(x) = x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 11x^2 + 7x + 2.$$

Поліном непарного степеня з дійсними коефіцієнтами. З основної теореми алгебри випливає, що поліном має п'ять коренів. Згідно з *наслідком 5* він має хоча б один дійсний корінь. Якщо він цілий, то є дільником вільного члена (наслідок із теореми Безу). Дільниками вільного члена є чотири числа: 1, 2, –1 та –2. З очевидних причин додатні значення не є коренями, оскільки всі коефіцієнти додатні. Залишається перевірити два значення: –1 та –2. Перевірка показує, що обидва ці числа є коренями. Отже, два множники шуканого розкладу вже є: $(x + 1)$ та $(x + 2)$. Поділивши поліном на добуток цих множників (чи послідовно на кожен із них), одержимо:

$$x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 11x^2 + 7x + 2 = (x+1)(x+2)(x^3 + 2x^2 + 2x + 1).$$

Легко перевірити, що –1 є коренем кубічного полінома. Тому, продовжуючи аналогічно розклад, дістанемо:

$$x^5+5x^4+10x^3+11x^2+7x+2=(x+1)^2(x+2)(x^2+x+1).$$

Квадратний тричлен у дужках дійсних коренів не має (його дискримінант від'ємний), тому даний поліном над полем дійсних чисел максимально розкладений на множники.

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Задане рівняння $x^5+3x^4-7x^2+x-12=0$. Чи можна на підставі Теореми Безу зробити висновок, що це рівняння має цілий корінь, який є дільником числа 12?
2. Чи може скінченна група, порядок якої дорівнює 7, мати нетривіальні підгрупи? Відповідь поясніть.
3. Чому дорівнює уявна частина комплексного числа, що є добутком двох взаємно спряжених комплексних чисел? Відповідь поясніть.
4. Чи є комутативним кільцем з одиницею множина всіх цілих парних чисел з операціями додавання та множення чисел? Відповідь поясніть.
5. Чи будуть дві групи, $G=\{g_i;"\times"\}$ та $P=\{p_i;"\otimes"\}$, з операціями, позначеними в лапках, ізоморфними, якщо існує відображення $f:G\to P$, таке, що для будь-яких $g_i, g_j \in G$ існують образи $f(g_i)\in P$ та $f(g_j)\in P$ і виконується співвідношення $f(g_i\times g_j)=f(g_i)\otimes f(g_j)$? Відповідь поясніть.

2.2. Геометрія

2.2.1. Прямі та площини у просторі: рівняння, взаємне розміщення

А. Рівняння площин та прямих

Рівняння площини, яка проходить через задану точку $M_0\left(x_0;y_0;z_0\right)$ ортогонально вектору $\vec{n}=\left\{A, B, C\right\}$, називають *рівнянням площини з нормальним вектором.*

Нехай точка $M_0\left(x_0;y_0;z_0\right)$, що задана радіусом-вектором $\vec{r}_0=\left\{x_0,y_0,z_0\right\}$, належить площині α. Рівняння площини, яка проходить через дану точку перпендикулярно вектору $\vec{n}=\left\{A, B, C\right\}$, у векторній формі має вигляд:

$$\vec{n}\left(\vec{r}-\vec{r}_0\right)=0, \qquad (2.2.1)$$

де $\vec{r}=\left\{x, y, z\right\}$ — радіус-вектор біжучої точки $M\left(x;y;z\right)$ площини α, а вектор $\vec{n}=\left\{A, B, C\right\}$ — нормальний вектор площини α *(рис. 2.2.1)*. Оскільки вектор $\vec{r}-\vec{r}_0$ лежить у площині α, то скалярний добуток $\vec{n}\left(\vec{r}-\vec{r}_0\right)$ має дорівнювати нулю.

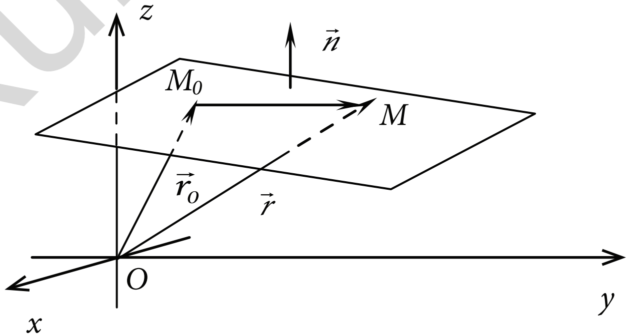


Рис. 2.2.1

Записавши (2.2.1) у координатній формі, одержимо:

$$A\left(x-x_0\right)+B\left(y-y_0\right)+C\left(z-z_0\right)=0 \qquad (2.2.2)$$

Загальне рівняння площини. Загальне рівняння площини отримуємо з рівняння (2.2.1), розкривши дужки та позначивши $D=-\left(Ax_0+By_0+Cz_0\right)$:

$$Ax+By+Cz+D=0 \qquad (2.2.3)$$

Окремі випадки рівняння (2.2.3)

I. Нехай у рівнянні (2.2.3) вільний член $D=0$, тоді маємо рівняння $Ax+By+Cz=0$ площини, яка проходить через початок координат, оскільки координати точки O (0; 0; 0) задовольняють це рівняння.

II. Нехай у рівнянні (2.2.3) один із коефіцієнтів A, B чи C дорівнює нулю. Без обмеження загальності покладемо $A=0$. Тоді отримаємо рівняння площини, паралельної тій координатній осі, яка відповідає відсутній у рівнянні змінній. Зокрема, рівняння площини, паралельної осі Ox, має вигляд:

$$By+Cz+D=0.$$

Якщо ж у цьому рівнянні $D=0$, то матимемо рівняння площини, яка проходить через вісь Ox:

$$By+Cz=0.$$

III. Припустимо без обмеження загальності, що у рівнянні (2.2.3) два коефіцієнти, наприклад, B та C, дорівнюють нулю. Тоді отримаємо рівняння площини, паралельної координатній площині yOz:

$$Ax+D=0.$$

Рівняння площини у відрізках на осях координат має вигляд:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1,$$

де за параметри, які визначають площину, обрані, відповідно, перша, друга та третя координати a, b та c кінців відрізків, що відтинаються цією площиною на координатних осях.

Нормальне рівняння площини. Нехай у декартовій системі координат *Oxyz* задана площина ω (*рис. 2.2.2*). Проведемо з точки *O* до площини ω вектор нормалі $\vec{n}=\overrightarrow{OP}$. Нехай $\left|\overrightarrow{OP}\right|=p$, а $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — напрямні косинуси цього вектора. Оскільки одиничний вектор нормалі до площини ω має координати, що збігаються з його напрямними косинусами

$$\vec{n}_0=\frac{1}{p}\overrightarrow{OP}=\left\{\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma\right\},$$

то координати самого вектора $\vec{n}=\overrightarrow{OP}$ визначаються співвідношенням $\overrightarrow{OP}=p\cdot\vec{n}_0$ або в координатній формі: $\overrightarrow{OP}=\left\{p\cos\alpha,\ p\cos\beta,\ p\cos\gamma\right\}$. Якщо $M(x,y,z)$ — біжуча точка площини ω, то $\vec{r}=\overrightarrow{OM}=\left\{x,\ y,\ z\right\}$ — радіус-вектор точки *M*, а вектор $\vec{u}=\vec{r}-\vec{n}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{PM}=\left\{x-p\cos\alpha,\ y-p\cos\beta,\ z-p\cos\gamma\right\}$ паралельний площині ω. З цього випливає так зване нормальне рівняння площини ω у векторній $(\vec{u}\cdot\vec{n}=0)$ або координатній формі:

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0.$$

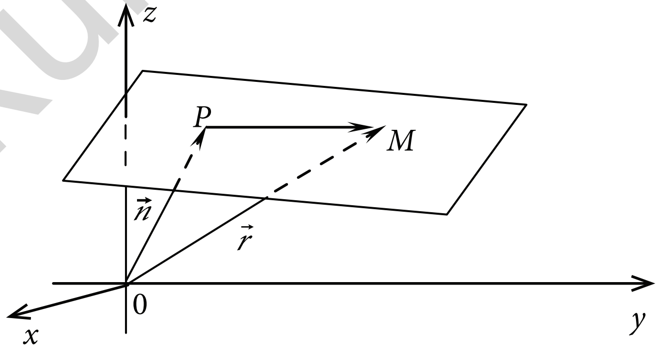


Рис. 2.2.2

Нормальне рівняння дає змогу швидко отримати відстань δ від будь-якої точки $M_0\left(x_0; y_0; z_0\right)$ простору до площини ω. Для цього досить підставити координати точки замість змінних у ліву частину рівняння і взяти модуль отриманого значення: $\delta = \left|x_0 \cos\alpha + y_0 \cos\beta + z_0 \cos\gamma - p\right|$.

Зведення загального рівняння площини до нормального. Як бачимо, нормальне рівняння площини є окремим випадком загального рівняння (2.2.3), у якого сума квадратів коефіцієнтів перед змінними дорівнює одиниці: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$, а вільний член — від'ємне число.

Тобто, для того щоб загальне рівняння площини (2.2.3) було нормальним, воно має задовольняти дві умови:

$$A^2 + B^2 + C^2 = 1 \quad \text{і} \quad D < 0.$$

Якщо ж рівняння (2.2.3) не є нормальним рівнянням площини, то його можна звести до нормального множенням обох його частин на нормуючий множник:

$$m = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

(обираємо знак множника, протилежний знаку вільного члена D в рівнянні).

Рівняння площини, що проходить через три точки. Нехай задані три точки, що не лежать на одній прямій: $M_0\left(x_0; y_0; z_0\right)$, $M_1\left(x_1; y_1; z_1\right)$, $M_2\left(x_2; y_2; z_2\right)$. Вони визначають деяку площину ω. І ця площина єдина. Уведемо позначення $\vec{r} = \overrightarrow{M_0M}$, $\vec{r}_1 = \overrightarrow{M_0M_1}$, $\vec{r}_2 = \overrightarrow{M_0M_2}$. Вектори $\vec{r}, \vec{r}_1, \vec{r}_2$ — компланарні площині ω. Отже, їх мішаний добуток дорівнює нулю. Тому векторне рівняння площини має вигляд $\left(\vec{r}, \vec{r}_1, \vec{r}_2\right)=0$, або в координатній формі:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \end{vmatrix}=0.$$

Канонічне та параметричні рівняння прямої у просторі є узагальненнями відповідних рівнянь на площині. Так, *канонічне* рівняння прямої, що проходить через точку $M_0\left(x_0;y_0;z_0\right)$ з напрямним вектором $\vec{a}=\left\{p, q, s\right\}$, має вигляд:

$$\frac{x-x_0}{p}=\frac{y-y_0}{q}=\frac{z-z_0}{s}.$$

Параметричні рівняння прямої, що проходить через точку $M_0\left(x_0;y_0;z_0\right)$ з напрямним вектором $\vec{a}=\left\{p, q, s\right\}$, має вигляд:

$$\begin{cases} x=pt+x_0, \\ y=qt+y_0, \\ z=st+z_0. \end{cases}$$

Параметричне задання прямої зручне, якщо потрібно знайти точку перетину прямої з площиною. Для цього достатньо підставити праві частини рівнянь у загальне рівняння площини та розв'язати лінійне рівняння з одним невідомим. Але перед цим слід перевірити умову існування точки перетину, тобто скалярний добуток напрямного вектора прямої на нормальний вектор площини має бути відмінним від нуля.

Пряму у просторі можна також визначити як *непорожній перетин двох площин*. Тобто, аналітичне задання прямої у цьому випадку має вигляд системи двох рівнянь з трьома невідомими:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \tag{2.2.4}$$

Якщо відповідні коефіцієнти рівнянь системи пропорційні (ранг системи дорівнює 1), то обидва рівняння задають одну й ту ж саму площину. Якщо ранг системи дорівнює двом (і лише в цьому випадку), площини, задані рівняннями системи, не збігаються, але мають спільну точку, а отже, мають спільну пряму.

За приклад використання алгебраїчного апарату аналітичної геометрії наведемо спосіб отримання канонічного рівняння прямої, заданої як перетин двох площин. За напрямний вектор прямої можна взяти векторний добуток нормальних векторів обох площин, оскільки він їм перпендикулярний. $\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ та $\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ — нормальні вектори даних площин. Їх векторний добуток $\vec{a}$ дорівнює:

$$\vec{a} = [\vec{n}_1 \times \vec{n}_2] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = p\vec{i} - q\vec{j} + s\vec{k} = (p, -q, s),$$

де p, q, s — значення відповідних мінорів.

Залишається знайти будь-яку точку прямої. Припустимо, що в системі (4) мінор $M = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$ не дорівнює нулю. Поклавши в системі, наприклад, $z = 1$, ми отримаємо систему двох рівнянь з двома невідомими, визначник якої не дорівнює нулю. За теоремою Крамера, така система сумісна та має єдиний розв'язок. Нехай упорядкована пара чисел $(\lambda; \mu)$ — її розв'язок. Тоді трійка чисел $(\lambda; \mu; 1)$ буде розв'язком системи (2.2.4) і, отже, координатами деякої точки прямої. Канонічне рівняння прямої матиме в цьому випадку вигляд:

$$\frac{x-\lambda}{p}=\frac{y-\mu}{-q}=\frac{z-1}{s}.$$

Б. Кути між прямими та площинами

Кут між двома площинами. Кутом між двома площинами називається лінійний кут будь-якого з двогранних кутів, утворених цими площинами (досить визначити один з цих кутів, оскільки сума їх дорівнює π). На підставі теореми про кут між перпендикулярами до двох площин сформулюємо спосіб обчислення кута між двома площинами. Кут φ між двома площинами дорівнює куту між їх нормальними векторами. Нехай $\vec{n}_1=\left(A_1,B_1,C_1\right)$ і $\vec{n}_2=\left(A_2,B_2,C_2\right)$ — нормальні вектори двох площин, які утворюють кут φ. Тоді, очевидно, $\cos\varphi=\dfrac{\left(\vec{n}_1,\vec{n}_2\right)}{\left|\vec{n}_1\right|\cdot\left|\vec{n}_2\right|}$ або в координатній формі:

$$\cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

Умова ж перпендикулярності площин: $\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2=0$.

Площини $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ і $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ будуть паралельними, якщо коефіцієнти при змінних пропорційні, але вільні члени — ні, тобто, якщо:

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}\neq\frac{D_1}{D_2}.$$

Кут між двома прямими у просторі. Кут між прямими можна визначити за кутом між їх напрямними векторами. Якщо прямі задані канонічними рівняннями:

$$\frac{x-a_1}{m_1}=\frac{y-b_1}{n_1}=\frac{z-c_1}{p_1} \text{ та } \frac{x-a_2}{m_2}=\frac{y-b_2}{n_2}=\frac{z-c_2}{p_2} \qquad (2.2.5)$$

і кут між їх напрямними векторами $\vec{a}_1=(m_1,n_1,p_1),\vec{a}_2=(m_2,n_2,p_2)$ гострий, то він дорівнює куту між прямими. Якщо ж цей кут тупий, то величина кута між прямими дорівнює 180° мінус кут між напрямними векторами. У будь-якому випадку досить знайти:

$$\cos\varphi=\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}.$$

Кут між прямою та площиною. Якщо пряма задана канонічним рівнянням $\frac{x-a_1}{m}=\frac{y-b_1}{n}=\frac{z-c_1}{p}$, а площина загальним $Ax+By+Cz+D=0$, то можемо обчислити косинус кута між напрямним вектором прямої та нормальним вектором площини:

$$\cos\varphi=\frac{mA+nB+pC}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}\cdot\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Але кут φ не є кутом між прямою та площиною, оскільки нормальний вектор перпендикулярний до площини. Кут φ, косинус якого ми знайшли, у сумі з кутом α між прямою та площиною складає 90°. Тому $\cos\varphi=\sin\alpha$, отже:

$$\sin\alpha=\frac{mA+nB+pC}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}\cdot\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Умова перетину двох прямих у просторі. Умова, за якої прямі (2.2.5) лежать в одній площині, має вигляд:

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}=0.$$

Якщо прямі паралельні і, отже, координати напрямних векторів пропорційні, то другий і третій рядки цього визначника пропорційні, що й забезпечує рівність визначника нулеві.

Якщо прямі не паралельні, тоді вони перетинаються, оскільки лежать в одній площині. Це означає, що вектор $\overrightarrow{M_1M_2}=\left(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\right)$ компланарний напрямним векторам $\vec{b}$ і $\vec{c}$ вказаних прямих *(рис. 2.2.3).* Тоді мішаний добуток цих векторів дорівнює нулю, тобто визначник дорівнює нулю.

Якщо визначник відмінний від нуля, то прямі мимобіжні.

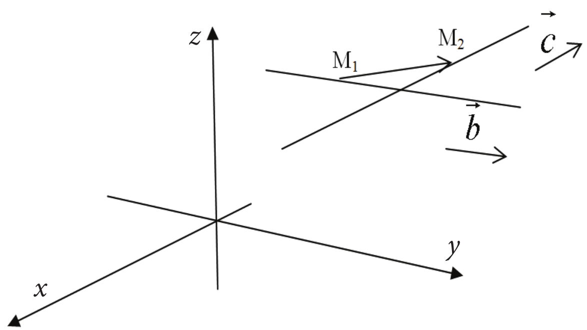


Рис. 2.2.3

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Чи є правильним твердження про те, що умовою перпендикулярності прямої і площини є перпендикулярність напрямного вектора цієї прямої нормальному вектору заданої площини?
2. Що можна сказати про три вектори, мішаний добуток яких дорівнює нулю?
3. Чи є правильним твердження про те, що скалярний добуток напрямного вектора прямої, паралельної площині, на нормальний вектор цієї площини дорівнює нулю?
4. Як треба розташувати в системі координат еліпс, щоб його рівняння було канонічним?
5. Навколо якої осі системи координат потрібно обертати гіперболу $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=1$, щоб отримати однопорожнинний гіперболоїд?
6. Відомо, що відстань точки кривої до найближчого фокуса дорівнює m, а її відстань до найближчої директриси — n. Відношення m до n менше за одиницю. Що це за крива?
7. Під яким кутом перетинаються площини $x + y - 1 = 0$ та $z - 1 = 0$?

2.2.2. Гладкі криві. Природна параметризація лінії. Кривина кривої

Відповіді на ці питання збудуємо у такій послідовності:

— дамо визначення гладкої лінії і наведемо приклад такої лінії;

— розкриємо поняття векторного задання кривої та природної параметризації;

— дамо визначення кривини, сформулюємо і доведемо теорему про її обчислення у випадку задання кривої в природній параметризації;

— сформулюємо теорему про необхідні і достатні умови для того, щоб просторова лінія була прямою;

— визначимо формули для знаходження кривини, якщо лінія задана в довільній параметризації, а також для плоскої кривої; проілюструємо на конкретних прикладах застосування цих формул;

— дамо визначення радіуса кривини плоскої кривої.

Одним із основних об'єктів диференціальної геометрії є крива лінія. Наочно криву можна уявити як траєкторію руху матеріальної точки.

Означення 2.2.1. Лінія γ називається *регулярною*, якщо вона може бути задана в параметричній формі рівняннями: $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$, $t \in [a;b]$, де функції $x = x(t), y = y(t)$, $z = z(t)$ k разів неперервно диференційовні, і для будь-якого $t \in (a;b)$ виконується умова $\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2 + \left(z'(t)\right)^2 \neq 0$. При $k = 1$ крива називається *гладкою*.

Гладкою є, наприклад, гвинтова лінія, параметричні рівняння якої такі: $x = a\cos t, y = a\sin t, z = ct$. Справді, $x'(t) = -a\sin t$, $y'(t) = a\cos t$, $z'(t) = c$, $\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2 + \left(z'(t)\right)^2 = a^2\sin^2 t +$ $+a^2\cos^2 t + c^2 = a^2 + c^2 \neq 0$.

Якщо в прямокутній декартовій системі координат $O\vec{i}\,\vec{j}\vec{k}$ лінія γ задана рівняннями $x = x(t), y = y(t), z = z(t),\ a \le t \le b$, то кожній її точці можна поставити у відповідність вектор $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$, початок якого збігається з початком координат, а кінець — з відповідною точкою кривої *(рис. 2.2.4).*

Зі зміною точки на кривій буде змінюватися як напрям, так і довжина вектора $\vec{r}(t)$, тому криву γ можна задати також *векторним* рівнянням $\vec{r} = \vec{r}(t)$.

Якщо за параметр взяти *s* — довжину дуги кривої (така параметризація кривої називається *природною*), то векторне рівняння лінії матиме вигляд $\vec{r} = \vec{r}(s)$. Однією з важливих переваг природної параметризації є те, що в ній вектор дотичної до кривої $\vec{r}'(s)$ є одиничним, тобто $\left|\vec{r}'(s)\right| = 1$. Справді, довжина дуги простої кривої, заданої гладкою вектор-функцією $\vec{r}(t)$ у довільній параметризації на проміжку $[0;t]$, дорівнює:

$$s(t) = \int_0^t \left|\vec{r}'(\eta)\right| d\eta \qquad (2.2.6)$$

Якщо ми перейдемо до природної параметризації за допомогою гомеоморфізму, заданого певним перетворенням, і візьмемо диференціали обох частин співвідношення (2.2.6), то отримаємо: $ds = \left|\vec{r}'(s)\right| ds$, звідки дістанемо $\dfrac{ds}{ds} = \left|\vec{r}'(s)\right|$. Оскільки ліва частина останньої рівності дорівнює одиниці, то й права також дорівнює одиниці, тобто $\left|\vec{r}'(s)\right| = 1$.

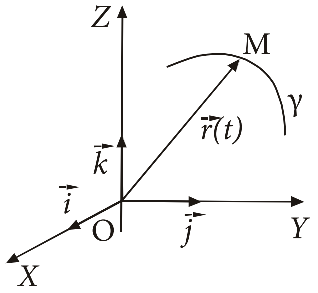


Рис. 2.2.4

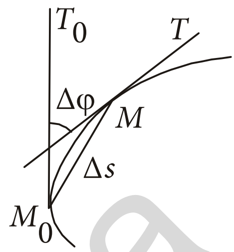


Рис. 2.2.5

Нехай γ — просторова регулярна крива, задана рівнянням у природній параметризації $\vec{r}=\vec{r}(s)$, M_0, M — дві близькі точки на ній, M_0T_0 і МТ — дотичні до γ в точках M_0 і М відповідно, $\Delta\phi$ — зовнішній суміжний кут між дотичними, Δs — довжина дуги M_0М (*рис. 2.2.5*).

Означення 2.2.2. *Кривиною* k_1 просторової кривої γ в її точці M_0 називається границя модуля відношення кута $\Delta\phi$ між дотичними до кривої в близьких її точках M_0 і М до довжини дуги Δs між точками дотику, якщо $\Delta s \to 0$:

$$k=\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\phi}{\Delta s}\right|=\left|\frac{d\phi}{ds}\right|.$$

Інакше кажучи, кривина кривої в точці M_0 — це швидкість зміни напряму дотичної до кривої в нескінченно малому околі точки M_0.

Справедливе наступне твердження.

Теорема 2.2.1

Кожна регулярна крива γ, задана рівнянням у природній параметризації $\vec{r} = \vec{r}(s)$, де $\vec{r}(s)$, — двічі неперервно диференційовна вектор-функція, в кожній своїй точці має певну кривину, яка визначається за формулою $k_1 = \left|\vec{r}''(s)\right|$.

Доведення. Нехай точці M_0 кривої γ, заданої векторним рівнянням $\vec{r} = \vec{r}(s)$, відповідає значення параметра s, а близькій до неї точці M — значення (s+Δs) (*рис. 2.2.6*). Кут Δφ між дотичними до кривої в даних точках дорівнює куту між векторами відповідних дотичних $\vec{\tau}(s)$ і $\vec{\tau}(s+\Delta s)$. Розмістимо ці вектори так, щоб вони мали спільний початок *M* (*рис. 2.2.7*). Вектори $\vec{\tau}(s)$ і $\vec{\tau}(s+\Delta s)$ у цьому випадку будуть одиничними: $\left|\vec{\tau}(s)\right| = \left|\vec{r}'(s)\right| = 1$ і $\left|\vec{\tau}(s+\Delta s)\right| = \left|\vec{r}'(s+\Delta s)\right| = 1$. Вектор $\vec{\tau}(s+\Delta s) - \vec{\tau}(s)$ напрямлений уздовж основи рівнобедреного трикутника з кутом $\Delta\varphi$ при вершині та одиничними бічними сторонами. Отже:

$$\left|\vec{\tau}(s+\Delta s) - \vec{\tau}(s)\right| = 2\sin\frac{\Delta\varphi}{2}. \qquad (2.2.7)$$

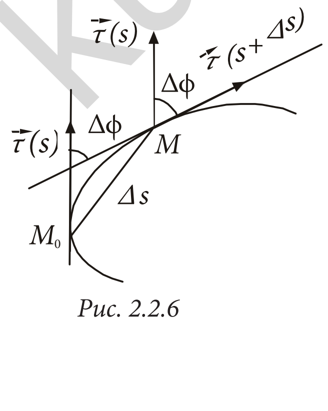


Рис. 2.2.6

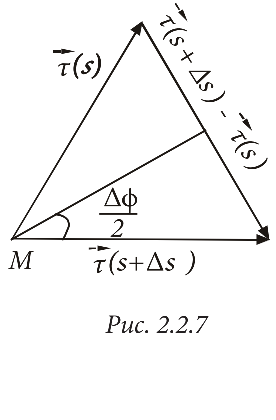


Рис. 2.2.7

Вектор-функція $\vec{r}(s)$ за умовою регулярна, тому $\vec{\tau}(s+\Delta s)\to\vec{\tau}(s)$ при $\Delta s\to 0$, а отже, й $\Delta\varphi\to 0$. З урахуванням рівності (2.2.7) одержимо:

$$\left|\vec{r}''(s)\right|=\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\vec{r}'(s+\Delta s)-\vec{r}'(s)}{\Delta s}\right|=\lim_{\Delta s\leftarrow 0}\frac{\left|\vec{\tau}(s+\Delta s)-\vec{\tau}(s)\right|}{|\Delta s|}=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{2\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}{|\Delta s|}=$$

$$=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}{\frac{\Delta\varphi}{2}}\cdot\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\varphi}{|\Delta s|}=\lim_{M\to M_o}\frac{\Delta\varphi}{|\Delta s|}=k_1.$$

Теорему доведено.

Якщо ж крива задана векторним рівнянням $\vec{r}=\vec{r}(t)$, де t — довільний параметр, то її кривина обчислюється за формулою:

$$k=\frac{\left|\left[\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)\right]\right|}{\left|\vec{r}'(t)\right|^3}\tag{2.2.8}$$

Доведемо це. Для початку зазначимо, що має місце співвідношення:

$$\left|\left[\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)\right]\right|^2=\left[\vec{r}'(t)\right]^2\cdot\left[\vec{r}''(t)\right]^2-\left(\vec{r}'(t),\vec{r}''(t)\right)^2\tag{2.2.9}$$

Справді, $\left|\left[\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)\right]\right|^2=\left[\vec{r}'(t)\right]^2\cdot\left[\vec{r}''(t)\right]^2\cdot\sin^2\varphi$, де φ — кут між векторами $\vec{r}'(t)$ та $\vec{r}''(t)$, а другий степінь означає скалярний добуток вектор-функції на себе. Але $\sin^2\varphi=1-\cos^2\varphi$. Підставивши у попередню формулу це значення та враховуючи, що $\left[\vec{r}'(t)\right]^2\cdot\left[\vec{r}''(t)\right]^2\cos^2\varphi=\left(\vec{r}'(t),\vec{r}''(t)\right)^2$, отримаємо (2.2.9).

Тепер перейдемо до доведення основної формули (2.2.8).

Якщо *s* — натуральний параметр, то очевидна рініcть:

$$\vec{r}_t'(t) = \vec{r}_s'(s)\cdot s'(t) \tag{2.2.10}$$

або $\left(\vec{r}_t'(t)\right)^2 = \left(\vec{r}_s'(s)\right)^2 \cdot \left(s'(t)\right)^2$. Але $\left(\vec{r}_s'(s)\right)^2 = 1$, як скалярний квадрат вектор-функції, модуль якої дорівнює одиниці. Звідси одержимо рівність: $\left(\vec{r}_t'(t)\right)^2 = \left(s'(t)\right)^2$. З останньої рівності випливає, що $s'(t) = \sqrt{\left(\vec{r}_t'(t)\right)^2}$. Підставляючи отримане у рівність (2.2.10), одержимо:

$$\vec{r}_t'(t) = \vec{r}_s'(s)\cdot\sqrt{\left(\vec{r}_t'(t)\right)^2} \text{ або } \vec{r}_s'(s) = \frac{\vec{r}_t'(t)}{\sqrt{\left(\vec{r}_t'(t)\right)^2}}.$$

Щоб знайти кривину, потрібно обчислити модуль другої похідної вектор-функції $\vec{r}(s)$, яка залежить від натурального параметра, по цьому параметру. Пам'ятаючи, що натуральний параметр у свою чергу є функцією від *t*, диференціюємо обидві частини останньої рівності по *t*. Похідна лівої частини дорівнює $\vec{r}_{ss}''(s)\cdot s'(t)$. Перший множник цього виразу по модулю дає нам значення кривини. Залишилося обчислити похідну правої частини та поділити її на $s'(t)$.

Отже, одержимо на першому кроці:

$$\left(\frac{\vec{r}_t'(t)}{\sqrt{\left(\vec{r}_t'(t)\right)^2}}\right)' = \frac{\vec{r}_{tt}''(t)\cdot\sqrt{\left(\vec{r}_t'(t)\right)^2} - \vec{r}_t'(t)\cdot\dfrac{\vec{r}_t'(t)\cdot\vec{r}_{tt}''(t)}{\sqrt{\left(\vec{r}_t'(t)\right)^2}}}{\left(\vec{r}_t'(t)\right)^2} =$$

(відокремимо для спрощення обчислень один дріб у правій частині від іншого)

$$=\frac{\vec{r}_{tt}''(t)}{\sqrt{\left(\vec{r}_t'(t)\right)^2}}-\frac{\vec{r}_t'(t)\cdot\left(\vec{r}_t'(t),\vec{r}_{tt}''(t)\right)}{\left(\vec{r}_t'(t)\right)^2\sqrt{\left(\vec{r}_t'(t)\right)^2}}$$

(скалярний добуток у правому дробі ми записали у більш звичному вигляді).

Тепер рівність набуде вигляду:

$$\vec{r}_{ss}''(s)\cdot s'(t)=\frac{\vec{r}_{tt}''(t)}{\sqrt{\left(\vec{r}_t'(t)\right)^2}}-\frac{\vec{r}_t'(t)\cdot\left(\vec{r}_t'(t),\vec{r}_{tt}''(t)\right)}{\left(\vec{r}_t'(t)\right)^2\sqrt{\left(\vec{r}_t'(t)\right)^2}}.$$

Піднесемо до квадрату обидві її частини:

$$\left(\vec{r}_{ss}''(s)\right)^2\cdot\left(s'(t)\right)^2=\left(\frac{\vec{r}_{tt}''(t)}{\sqrt{\left(\vec{r}_t'(t)\right)^2}}-\frac{\vec{r}_t'(t)\cdot\left(\vec{r}_t'(t),\vec{r}_{tt}''(t)\right)}{\left(\vec{r}_t'(t)\right)^2\sqrt{\left(\vec{r}_t'(t)\right)^2}}\right)^2.$$

Обчислимо окремо праву частину:

$$\left(\frac{\vec{r}_{tt}''(t)}{\sqrt{\left(\vec{r}_t'(t)\right)^2}}-\frac{\vec{r}_t'(t)\cdot\left(\vec{r}_t'(t),\vec{r}_{tt}''(t)\right)}{\left(\vec{r}_t'(t)\right)^2\sqrt{\left(\vec{r}_t'(t)\right)^2}}\right)^2=\frac{\left(\vec{r}_{tt}''(t)\right)^2}{\left(\vec{r}_t'(t)\right)^2}+\frac{\left(\vec{r}_t'(t)\right)^2\cdot\left(\vec{r}_t'(t),\vec{r}_{tt}''(t)\right)^2}{\left(\vec{r}_t'(t)\right)^6}-$$

$$-2\cdot\frac{\left(\vec{r}_t'(t),\vec{r}_{tt}''(t)\right)^2}{\left(\vec{r}_t'(t)\right)^4}=\frac{\left(\vec{r}_{tt}''(t)\right)^2}{\left(\vec{r}_t'(t)\right)^2}-\frac{\left(\vec{r}_t'(t),\vec{r}_{tt}''(t)\right)^2}{\left(\vec{r}_t'(t)\right)^4}.$$

Враховуючи, що $\left(\vec{r}_t'(t)\right)^2=\left(s'(t)\right)^2$, одержимо:

$$\left(\vec{r}_{ss}''(s)\right)^2=\frac{\left(\vec{r}_{tt}''(t)\right)^2\left(\vec{r}_t'(t)\right)^2}{\left(\vec{r}_t'(t)\right)^6}-\frac{\left(\vec{r}_t'(t),\vec{r}_{tt}''(t)\right)^2}{\left(\vec{r}_t'(t)\right)^6}=\frac{\left[\vec{r}'(t)\right]^2\cdot\left[\vec{r}''(t)\right]^2\cdot\sin^2\varphi}{\left(\vec{r}_t'(t)\right)^6}.$$

Отже,

$$\left(\vec{r}''_{ss}(s)\right)^2 = \frac{\left[r'(t)\times r''(t)\right]^2}{\left(r'(t)\right)^6}.$$

Оскільки $\left(\vec{r}''_{ss}(s)\right)^2 = k_1^2$ — квадрат кривини, то

$$k_1 = \frac{\left[r'(t)\times r''(t)\right]}{\left|r'(t)\right|^3}.$$

Формула (2.2.8) доведена.
У координатах ця формула має вигляд:

$$k_1 = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}^2}}{\left(x'^2 + y'^2 + z'^2\right)^{3/2}} \qquad (2.2.11)$$

Приклад 2.2.1. Обчислити кривину гвинтової лінії $x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = ct$ у її довільній точці.

Розв'язання. Знайдемо похідні першого й другого порядків у довільній точці, якій відповідає параметр t.

$$x' = -a\sin t\ ,\ y' = a\cos t\ ,\ z = c\ ;$$

$$x'' = -a\cos t\ ,\ y'' = -a\sin t\ ,\ z'' = 0\ .$$

Підставимо їх у формулу (2.2.11):

$$k = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} a\cos t & c \\ -a\sin t & 0 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} c & -a\sin t \\ 0 & -a\cos t \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} -a\sin t & a\cos t \\ -a\cos t & -a\sin t \end{vmatrix}^2}}{\left(a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + c^2\right)^{3/2}} =$$

$$=\frac{\sqrt{a^2c^2\sin^2 t+a^2c^2\cos^2 t+a^4\left(\sin^2 t+\cos^2 t\right)^2}}{\left(a^2+c^2\right)^{3/2}}=\frac{\sqrt{a^2c^2+a^4}}{\left(a^2+c^2\right)^{3/2}}=$$

$$=\frac{a\sqrt{a^2+c^2}}{\left(\sqrt{a^2+c^2}\right)^3}=\frac{a}{a^2+c^2}.$$

Як бачимо, кривина гвинтової лінії стала в усіх її точках. Справедлива й наступна теорема.

Теорема 2.2.2

Щоб просторова лінія була прямою, необхідно й достатньо, щоб у всіх точках цієї лінії її кривина дорівнювала нулю.

Якщо крива плоска й задана параметричними рівняннями $x=x(t)$, $y=y(t)$, то її можна розглядати як просторову лінію з параметричними рівняннями $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=0$. Тому для обчислення кривини такої лінії у формулі (2.2.11) слід покласти $z'=z''=0$. Тоді матимемо:

$$k_1=\frac{\sqrt{\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}^2}}{\left(x'^2+y'^2\right)^{3/2}}=\frac{\left|x'y''-x''y'\right|}{\left(x'^2+y'^2\right)^{3/2}} \qquad (2.2.12)$$

Якщо ж крива задана явним рівнянням $y=f(x)$, то, переходячи від нього до параметричних рівнянь, взявши за параметр x, одержимо $x=x$, $y=f(x)$. Тоді $x'=1$, $x''=0$. Підставимо ці значення похідних у формулу (2.2.12), одержимо:

$$k = \frac{|y''|}{\left(1+y'^2\right)^{3/2}}.$$

Приклад 2.2.2. Обчислити кривину кола в довільній його точці.

Розв'язання. Запишемо параметричні рівняння кола з центром у початку координат і радіусом R: $x = R\cos t, y = R\sin t$. Обчислимо похідні: $x' = -R\sin t$, $y' = R\cos t$, $x'' = -R\cos t$, $y'' = -R\sin t$.

Підставимо значення похідних у формулу (2.2.12), дістанемо:

$$k_1 = \frac{\left|\; R^2\sin^2 t + R^2\cos^2 t \;\right|}{\left(R^2\sin^2 t + R^2\cos^2 t\right)^{3/2}} = \frac{R^2}{R^3} = \frac{1}{R}.$$

Отже, кривина кола обернено пропорційна до його радіуса й має сталу величину в усіх своїх точках.

Для плоскої кривої вводиться також поняття радіуса кривини.

Означення 2.2.3. *Радіусом кривини* (ρ) плоскої кривої у певній її точці називається величина, обернена до кривини кривої у цій точці. Тобто $\rho = \frac{1}{k_1}$. Звідси випливає, що чим більша кривина кривої, тим менший радіус кривини, і навпаки. Оскільки кривина кола дорівнює $\frac{1}{R}$, то радіус кривини кола дорівнює його радіусу: $\rho = R$.

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Яку характеристику кривої, заданої натуральним рівнянням (аргумент вектор-функції кривої визначається довжиною дуги), описує модуль другої похідної вектор-функції цієї кривої?
2. Чому дорівнює скрут кривої, утвореної перетином поверхні $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ та площини $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$?
3. Чому може дорівнювати напрямний вектор дотичної до кривої, заданої вектор-функцією $\bar{r}(t)=\left\{\cos t;\sin t;2t\right\}$?
4. Назвіть принаймні одну лінію на площині зі сталою кривиною.
5. Назвіть принаймні одну лінію у просторі зі сталим скрутом.
6. Під яким кутом розташовані перша та друга похідні вектор-функції кривої, заданої натуральним рівнянням?
7. Доведіть, що кривина нормального перетину поверхні $\bar{r}(u,v)=\left\{1+2u+3v;2-u+2v;u+v\right\}$ у будь-якій її точці дорівнює нулю. Що це за поверхня?

2.2.3. Проєктивні координати

(Проєктивні координати точки; однорідні афінні координати точки на прямій; пряма на проєктивній площині; складне відношення)

А. Проєктивні координати точки

Нехай деякий базис $\mathrm{B}=\left\{\vec{a}_i\right\}_{n+1}$ векторного простору $V_{n+1}\setminus\{\vec{0}\}$ породжує в проєктивному просторі $P_n(V)$ проєктивний репер $\mathfrak{R}=\{A_1,A_2,\ldots,A_n,E\}$, де точка E — породжена вектором $\vec{e}=\sum_{i=1}^{n}\vec{a}_i$. Тоді проєктивними координатами довільної точки M проєктивного простору $P_n(V)$ в репері $\mathfrak{R}$ будемо називати координати вектора $\vec{m}$ простору $V_{n+1}\setminus\{\vec{0}\}$, такого, що породжує цю точку M. Наприклад, на *рис. 2.2.8* проєктивним простором є розширена евклідова пряма $\overline{a}$.

Записуємо: $M(x_1:x_2:\ldots:x_n:x_{n+1})_{\mathfrak{R}}$.

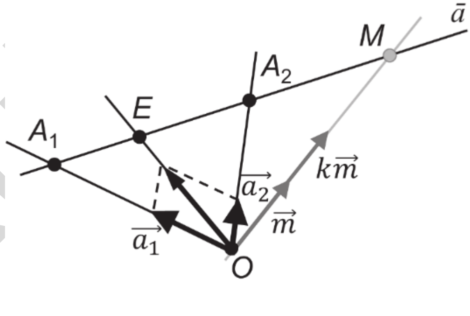


Рис. 2.2.8. До означення проєктивних координат точки.

Важливо!

1. Проєктивні координати точки *M* деякого проєктивного простору визначені не однозначно, а з точністю до спільного ненульового множника. Тому при їх записі використовується двокрапка.

2. Проєктивні координати точки не можуть всі одночасно дорівнювати нулю.

Приклад 2.2.2. Знайти координати фундаментальних точок репера на проєктивній площині.

Розв'язання. Згідно з означенням, проєктивними координатами точок на площині є координати породжуючого їх вектора у векторному базисі, що породжує проєктивний репер.

Для фундаментальних точок репера $\mathfrak{R}=\{A_1, A_2, \ldots, A_n, E\}$ маємо:

$$A_1: \quad \vec{a}_1 = 1\cdot\vec{a}_1 + 0\cdot\vec{a}_2 + 0\cdot\vec{a}_3;$$

$$A_2: \quad \vec{a}_2 = 0\cdot\vec{a}_1 + 1\cdot\vec{a}_2 + 0\cdot\vec{a}_3;$$

$$A_3: \quad \vec{a}_3 = 0\cdot\vec{a}_1 + 0\cdot\vec{a}_2 + 1\cdot\vec{a}_3;$$

$$E: \quad \vec{e} = 1\cdot\vec{a}_1 + 1\cdot\vec{a}_2 + 1\cdot\vec{a}_3.$$

Отже, фундаментальні точки проєктивного репера на площині мають в цьому репері такі координати: $A_1(1:0:0)_{\mathfrak{R}}$, $A_2(0:1:0)_{\mathfrak{R}}$, $A_3(0:0:1)_{\mathfrak{R}}$, $E(1:1:1)_{\mathfrak{R}}$.

Б. Однорідні афінні координати точки на прямій

Нехай в розглянутій на *рис. 2.2.8* моделі точка A_1 буде невласною: $A_1 = A_{1\infty}$, тобто її прообразом буде пряма $a' \parallel \overline{a}$ (*рис. 2.2.9*).

Проєктивна система координат (репер) на розширеній евклідовій прямій, в якій точка A_1 невласна, називається *системою однорідних афінних координат*.

Тоді вектор $\vec{m}$, що породжує точку *M* на проєктивній прямій у векторному базисі $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$, матиме координати $(x;1)$, а проєктивними координатами точки *M*, які називають *однорід-*

ними афінними координатами, в такому репері будуть: $(x:1)$. Тут x — афінна (неоднорідна) координата точки M в афінному репері $\left\{A_2, \overrightarrow{A_2E}\right\}$.

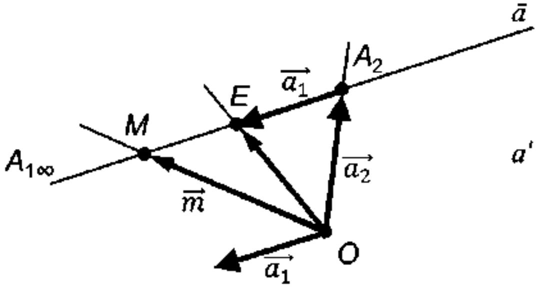


Рис. 2.2.9. Проєктивний репер на прямій із невласною фундаментальною точкою $A_{1\infty}$.

Приклад 2.2.3. На розширеній евклідовій прямій в однорідних афінних координатах дано точки: $A(1:1)$, $B(2:3)$, $C(-3:5)$, $D(1:0)$, $E(0:1)$. Знайти їх неоднорідні афінні координати на цій прямій.

Розв'язання. Однорідними афінними координатами точки на проєктивній прямій є координати виду $(x:1)$, які легко перевести в неоднорідні, відкинувши останню одиницю. Крім того, проєктивні координати з точністю до гомотетії задають одну й ту саму точку. Тому, щоб знайти неоднорідні афінні координати точок, поділимо пару однорідних координат на другу координату, щоб другою координатою стала одиниця, і відкинемо її:

$A(1:1)$ — тут немає потреби ділити на другу координату $\to A(1)$;

$B(2:3) \to B(2/3:1) \to B(2/3)$;

$C(-3:5) \to C(-3/5:1) \to C(-3/5)$;

$D(1:0)$ — внаслідок ділення на нуль ми отримаємо невласну точку $\to D_{\infty}$;

$E(0:1)$ — тут немає потреби ділити на другу координату $\to E(0)$.

Примітка. І навпаки, щоб перевести неоднорідні афінні координати власної точки в однорідні (проєктивні), потрібно дописати одиницю останньою координатою. Наприклад, на прямій: $F(-7) \to F(-7:1)$, на площині: $P(0,3;-2) \to P(0,3:-2:1)$ або $P(3:-20:10)$.

B. Пряма на проєктивній площині

Нехай на проєктивній площині $P_2(V)$ задано репер $\Re = \{A_1, A_2, \ldots, A_n, E\}$.

Три точки проєктивної площини $X(x_1 : x_2 : x_3)_{\Re}$, $Y(y_1 : y_2 : y_3)_{\Re}$, $Z(z_1 : z_2 : z_3)_{\Re}$, що задані координатами в репері $\Re$, лежать на одній прямій тоді (і тільки тоді), коли:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0 \tag{2.2.13}$$

Звідси одержимо рівняння прямої, що проходить через дві точки $A(a_1 : a_2 : a_3)_{\Re}$ і $B(b_1 : b_2 : b_3)_{\Re}$ на проєктивній площині:

$$\begin{vmatrix} x_1 & a_1 & b_1 \\ x_2 & a_2 & b_2 \\ x_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} - x_2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + x_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$$

або

$$\begin{vmatrix} x_1 & a_1 & b_1 \\ x_2 & a_2 & b_2 \\ x_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + x_2 \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} + x_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0,$$

де x_1, x_2, x_3 — проєктивні координати деякої точки M цієї прямої в репері $\mathfrak{R}$.

Загальне рівняння прямої на проєктивній площині:

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0,$$

де

$$u_1 = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}, \quad u_2 = \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}, \quad u_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Числа u_1, u_2, u_3 називаються координатами прямої в репері $\mathfrak{R}$. Разом з тим довільні три числа, які одночасно не дорівнюють нулю, є координатами деякої прямої на проєктивній площині.

Приклад 2.2.4. Знайти координати прямої на проєктивній площині, яка проходить через точки $A(-1:2:0)$ та $B(2:-1:3)$.

Розв'язання. Виведемо загальне рівняння прямої, що проходить через дві точки, з умови належності трьох точок — $A(-1:2:0)$, $B(2:-1:3)$ та деякої біжучої точки $M(x_1:x_2:x_3)$ — одній прямій:

$$\begin{vmatrix} x_1 & -1 & 2 \\ x_2 & 2 & -1 \\ x_3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x_1 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + x_2 \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + x_3 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$6x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 0,$$

і остаточно загальне рівняння прямої:

$$2x_1 + x_2 - x_3 = 0\ .$$

Отже, координати прямої: $AB(2:1:-1)$.

Нехай на проєктивній площині $P_2(V)$ задано репер $\Re = \{A_1, A_2, \ldots, A_n, E\}$.

Три прямі проєктивної площини $a\{a_1 : a_2 : a_3\}_\Re$, $b\{b_1 : b_2 : b_3\}_\Re$, $c\{c_1 : c_2 : c_3\}_\Re$, що задані координатами в репері $\Re$, належать одному пучку (перетинаються в одній точці — центрі пучка) тоді і тільки тоді, коли:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0 \qquad (2.2.14)$$

Г. Складне відношення

Нехай на проєктивній прямій задано репер $\Re = \{A, B, C\}$ і точку $D(x_1 : x_2)_\Re \neq A_1$, тоді *складним (подвійним) відношенням* впорядкованих чотирьох точок *A, B, C, D* проєктивної прямої є число $(AB, CD) = \dfrac{x_1}{x_2}$ *(рис. 2.2.10).*

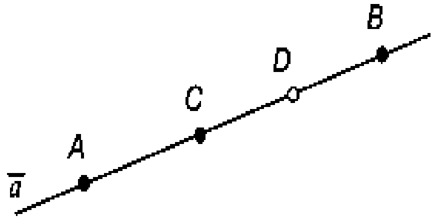


Рис. 2.2.10

Чотири точки, для яких $(AB,CD)=-1$, називаються *гармонічними.*

Властивості складного відношення чотирьох точок проєктивної прямої

- Якщо A, B і C різні точки прямої, λ — довільне дійсне число, то на даній прямій існує одна (і тільки одна) точка X, така, що $(AB,CX)=\lambda$.
- Якщо на прямій дано точки A, B, C, D і D', для яких істинна умова: $(AB,CD)=(AB,CD')$, то точки D і D' співпадають.
- Якщо різні точки A, B, C і точка $D \neq A$, які належать одній прямій, в деякому репері мають координати $A(a_1:a_2)_{\mathfrak{R}}, B(b_1:b_2)_{\mathfrak{R}}, C(c_1:c_2)_{\mathfrak{R}}, D(d_1:d_2)_{\mathfrak{R}}$, то:

$$(AB,CD)=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} b_1 & d_1 \\ b_2 & d_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}}.$$

- Якщо A, B, C, D — власні точки і P_∞ — невласна точка розширеної евклідової прямої, то:

$$(AB,CD)=\frac{(AB,C)}{(AB,D)},$$
$$(AB,CP_\infty)=-(AB,C),$$

де (AB,C), (AB,D) — прості відношення трьох відповідних точок.

Примітка. $(AB,CP_\infty)=-1,$ тоді (і тільки тоді), коли точка C — середина відрізка AB .

- Якщо точка D збігається із точками B, або C, то:

$$(AB,CB)=0,$$
$$(AB,CC)=1.$$

- Знайшовши складне відношення чотирьох точок (*AB*, *CD)*, можна обчислити складні відношення цих чотирьох точок в іншому порядку за рівностями:

$$(AB,CD)=(CD,AB)=(BA,DC);$$
$$(AB,CD)=\frac{1}{(AB,DC)}=\frac{1}{(BA,CD)};$$
$$(AB,CD)+(AC,BD)=1.$$

Нехай *a, b, c* і *d* — чотири прямі деякого пучка на площині з центром в точці *O*. Точки *A*, *B*, *C* і *D* — точки перетину цих прямих з довільною прямою *g*, яка не проходить через *O*. Число (*AB*, *CD)* називається *складним відношенням чотирьох прямих a, b, c* і *d* пучка *O*: (*ab*, *cd)* = (*AB*, *CD)* (*рис. 2.2.11*).

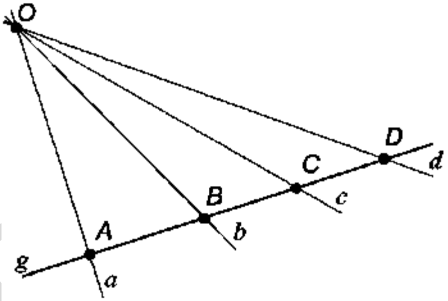


Рис. 2.2.11

Якщо на проєктивній площині чотири прямі одного пучка задані в деякому репері своїми координатами: $a\{a_1:a_2:a_3\}_{\Re}, b\{b_1:b_2:b_3\}_{\Re}, c\{c_1:c_2:c_3\}_{\Re}, d\{d_1:d_2:d_3\}_{\Re}$, то:

$$(ab,cd)=\frac{\begin{vmatrix}a_1 & c_1\\ a_2 & c_2\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}b_1 & d_1\\ b_2 & d_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_1 & d_1\\ a_2 & d_2\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}b_1 & c_1\\ b_2 & c_2\end{vmatrix}},\ (ab,cd)=\frac{\begin{vmatrix}a_1 & c_1\\ a_3 & c_3\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}b_1 & d_1\\ b_3 & d_3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_1 & d_1\\ a_3 & d_3\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}b_1 & c_1\\ b_3 & c_3\end{vmatrix}},\ (ab,cd)=\frac{\begin{vmatrix}a_2 & c_2\\ a_3 & c_3\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}b_2 & d_2\\ b_3 & d_3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_2 & d_2\\ a_3 & d_3\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}b_2 & c_2\\ b_3 & c_3\end{vmatrix}}.$$

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Чи можуть бути в проєктивному репері на розширеній евклідовій прямій дві фундаментальні точки невласними? Відповідь обґрунтуйте.
2. Чому точка в проєктивному просторі не може мати всі проєктивні координати рівні нулю?
3. Використовуючи умову належності прямих проєктивної площини одному пучку (2.2.14), виведіть загальне рівняння площини, заданої двома прямими цієї площини $a\{a_1 : a_2 : a_3\}_{\mathfrak{R}}$ і $b\{b_1 : b_2 : b_3\}_{\mathfrak{R}}$.
4. Який знак буде у складного відношення чотирьох точок (*AB, CD)*, якщо пара точок *C*, *D* розділяє/не розділяє пару точок *A*, *B*?

   Нехай *A*, *B*, *C*, *D* — чотири точки на проєктивній прямій. Тоді пара точок *C*, *D* розділятиме пару точок *A*, *B* у тому випадку, коли, щоб поєднати точку *C* з іншою точкою своєї пари (*D*) при русі її по прямій, обов'язково зустрінеться в якийсь момент або точка *A*, або точка *B* (див., напр., *рис. 2.2.10*).
5. Чи можемо знайти значення складного відношення чотирьох різних точок, якщо дві з них невласні? Відповідь обґрунтуйте
6. Складне відношення чотирьох власних точок проєктивної прямої (*AB, CD)* = 1. Зобразіть схематично їх розміщення на прямій.

2.2.4. Принцип двоїстості в проєктивному просторі

Важливою особливістю проєктивних властивостей геометричних об'єктів є симетрія ролей, які грають точки, прямі та площини в означеннях і теоремах, у формулюванні яких беруть участь лише поняття проєктивного простору, розмірності та взаємного розташування (інцидентності) об'єктів. Тому можна встановити відповідності між різними об'єктами в проєктивних просторах (наприклад, підпросторами різних розмірностей) і їх властивостями. Це означають як **принцип двоїстості**.

Примітка. В евклідовій геометрії принцип двоїстості не виконується!

А. Малий принцип двоїстості на проєктивній площині

Нехай на проєктивній площині дано точку з координатами $(x_1 : x_2 : x_3)$ та пряму з координатами $\{u_1 : u_2 : u_3\}$. Умовою їх інцидентності є:

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0 \tag{2.2.15}$$

Якщо поставити у відповідність кожній точці $(x_1 : x_2 : x_3)$ пряму $\{x_1 : x_2 : x_3\}$, а кожній прямій $\{u_1 : u_2 : u_3\}$ точку $(u_1 : u_2 : u_3)$, то встановиться бієктивне відображення множини всіх елементів (точок і прямих) проєктивної площини на саму себе: $(x_1 : x_2 : x_3) \leftrightarrow \{x_1 : x_2 : x_3\}$.

Очевидно, що таке відображення зберігає відношення інцидентності, оскільки виконання умови (2.2.15) не залежить від того, яка трійка координат вважатиметься координатами точки, а яка — прямої.

Таким чином, і точки, і прямі на проєктивній площині — рівноправні геометричні об'єкти, які взаємно однозначно відповідають класу числових трійок — їх координат. Ці об'єкти зв'язані між собою відношенням інцидентності (2.2.15):

— якщо в (2.2.15) вважати даною пряму $\{u_1 : u_2 : u_3\}$, то це відношення визначає множину точок, що належить цій прямій;
— якщо в (2.2.15) вважати даною точку $(x_1 : x_2 : x_3)$, то це відношення визначає множину прямих пучка із центром в даній точці.

Така рівноправність точок і прямих на проєктивній площині й зумовлює **принцип двоїстості на проєктивній площині (малий)**:

Якщо на проєктивній площині вірне деяке твердження Δ, в якому говориться про точки й прямі та їх взаємне розташування (інцидентність), то буде вірним також так зване двоїсте твердження Δ, яке можна отримати із даного взаємною заміною слів «точка» і «пряма»:*

Δ	точка	пряма	лежить на	проходить через
⇕	⇕	⇕	⇕	⇕
Δ*	пряма	точка	проходить через	лежить на

Дві фігури взаємно двоїсті, якщо одна може бути отримана з іншої за допомогою заміни кожного елемента й кожної операції двоїстим елементом і двоїстою операцією.

Дві теореми взаємно двоїсті, якщо одна перетворюється в іншу при заміні кожного елемента й кожної операції двоїстим елементом і двоїстою операцією.

Таким чином, якщо доведена деяка теорема проєктивної геометрії, то можна вважати доведеною і двоїсту їй теорему.

Наприклад, пари двоїстих фігур проєктивної площини:
— точка — пряма (неінцидентна цій точці);
— дві різні прямі — дві різні точки;

— колінеарні точки (множина точок, що лежать на одній прямій) — пучок прямих;

— тривершинник (фігура, яка складається з трьох точок, які не лежать на одній прямій, і трьох прямих, які попарно з'єднують ці точки) — тристоронник (фігура, яка складається з трьох прямих, які не проходять через одну точку, і трьох точок, в яких попарно перетинаються ці прямі).

Б. Великий принцип двоїстості в проєктивному просторі

У проєктивному тримірному просторі рівняння прямої заміняємо рівнянням площини:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = 0 \qquad (2.2.16)$$

Якщо міркувати аналогічно попередньому випадку *(А)*, то очевидно, що у цьому випадку рівняння (2.2.16) є умовою інцидентності точки $(x_1 : x_2 : x_3 : x_4)$ і площини $\{a_1 : a_2 : a_3 : a_3\}$. Тому в проєктивному просторі рівноправними геометричними об'єктами є точки й площини, які взаємно однозначно відповідають класу числових четвірок.

Як наслідок, **принцип двоїстості в проєктивному просторі (великий)**:

Якщо в проєктивному просторі вірне деяке твердження Δ, в якому говориться про точки, площини і прямі та їх взаємне розташування (інцидентність), то буде вірним також двоїсте твердження Δ, яке можна отримати із даного заміною слів «точка» і «площина»:*

Δ	точка	площина	пряма	лежить на	проходить через
⇕	⇕	⇕	⇕	⇕	⇕
Δ*	площина	точка	пряма	проходить через	лежить на

Пари двоїстих фігур проєктивного простору:
- — точка — площина (неінцидентна цій точці);
- — дві мимобіжні прямі — дві мимобіжні прямі (*тут важливо:* прямі не мають спільних точок, ні власних, ні невласних);
- — колінеарні точки (множина точок, що лежать на прямій) — пучок площин (множина усіх площин простору, які мають спільну пряму);
- — пучок прямих, що належать одній площині, — пучок прямих, що належать одній точці (множина усіх площин простору, які мають спільну точку);
- — площина і пряма, яка не лежить в ній — точка і пряма, що не проходить через цю точку;
- — в'язка площин (множина усіх площин простору, які проходять через дану точку) — множина точок, що належить одній площині.

Прикладом пари двоїстих теорем є теорема Дезарга і теорема, обернена до неї. Отже, за принципом двоїстості, якщо *в деякій проєктивній геометрії теорема Дезарга правильна, то правильна й обернена до неї теорема*. При цьому збіг двоїстої і оберненої теорем тут випадковий. Як правило, обернена й двоїста теореми до даної не збігаються.

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Яка фігура буде двоїстою тривершиннику в проєктивному просторі (за великим принципом двоїстості).
2. Перефразуйте твердження за великим і малим принципом двоїстості:
   1) через дві точки можна провести пряму і тільки одну;

2) завжди існують принаймні три точки, що не належать одній прямій;
3) три точки, що не лежать на одній прямій, належать одній площині;
4) пряма і точка, що їй не належить, належать одній площині;
5) пряма, що не лежить у даній площині, перетинає її в одній точці.

3. Сформулюйте теорему, двоїсту теоремі Паскаля на проєктивній площині: «Точки перетину трьох пар протилежних сторін шестивершинника, вписаного в криву II порядку, лежать на одній прямій».

   Підказка. Фігурами, двоїстими точкам на кривій другого порядку, є прямі, дотичні до лінії II порядку. Подумайте, яку відому теорему проєктивної геометрії ви сформулювали.

4. Сформулюйте теорему, двоїсту теоремі Паппа, яка є виродженим випадком теореми Паскаля: «Якщо A, B, C — три точки на одній прямій проєктивної площини, A', B', C' — три точки на іншій прямій цієї площини, то точки перетину пар прямих AB' і $A'B$, BC' і $B'C$, CA' і $C'A$ лежать на одній прямій».

2.3. Математичний аналіз

2.3.1. Границя послідовності

(Означення границі послідовності дійсних чисел. Основні властивості границь. Теорема про збіжність обмеженої монотонної послідовності. Друга важлива границя, число е)

А. Означення границі послідовності

Якщо уявити собі числову послідовність $x_n = \frac{1}{n}$ точками числової прямої, то неважко помітити, що члени послідовності із зростанням їх порядкового номера скупчуються (згущуються) до нуля. Причому «підходять» вони до нуля як завгодно близько, так, що, який би маленький окіл точки нуль ми не взяли, за його межами залишиться лише скінченне число перших членів послідовності, а решта (увесь нескінченний «хвіст») потрапить у цей окіл. Наприклад, в інтервал (−0,1; 0,1) потрапляють усі члени послідовності, починаючи з одинадцятого, а в інтервал, скажімо, (−0,01; 0,01) — усі, починаючи зі сто першого. У цій ситуації кажуть, що число нуль — границя зазначеної послідовності. Спираючись на таке геометричне уявлення, дамо строге означення границі послідовності.

Означення 2.3.1 *(геометричне).* Число a називається границею послідовності $\{x_n\}$ ($\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$), якщо у будь-який ε-окіл точки a потрапляють усі члени послідовності, починаючи з деякого.

Означення 2.3.2. Число a називається границею послідовності $\{x_n\}$ (позначається $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$), якщо для будь-якого

$\varepsilon > 0$ знайдеться такий номер n_0, який залежить від ε, що для всіх $n > n_0$ виконується нерівність $|x_n - a| < \varepsilon$.

Або символічно:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall\varepsilon > 0 \quad \exists n_0 = n_0(\varepsilon) : |x_n - a| < \varepsilon\, \forall n > n_0 .$$

Послідовність, яка має границю, називається *збіжною*, в іншому випадку — *розбіжною*.

Збіжна до нуля послідовність називається *нескінченно малою послідовністю*.

Б. Основні властивості границь

1. *Необхідна умова збіжності.* Якщо послідовність збіжна, то вона обмежена.

2. *Єдиність границі.* Якщо послідовність має границю, то ця границя єдина.

3. *Граничний перехід у нерівності.* Якщо відповідні члени збіжних числових послідовностей $\{x_n\}$ та $\{y_n\}$, починаючи з деякого номера, задовольняють нерівність $x_n \le y_n$ (або $x_n < y_n$), то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \le \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

4. *Границя проміжної послідовності.* Якщо відповідні члени збіжних числових послідовностей $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ та $\{z_n\}$, починаючи з деякого номера, задовольняють нерівність $x_n \le y_n \le z_n$ (або $x_n < y_n < z_n$) і $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$, то $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.

5. *Границя сталої послідовності.* Стала послідовність, усі члени якої дорівнюють C, збігається до C ($\lim\limits_{n\to\infty} C = C$).

6. *Арифметичні властивості.* Якщо послідовності $\{x_n\}$ та $\{y_n\}$ збіжні, то збіжними є також їх сума, різниця, добуток, частка, причому:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_n \pm y_n\right) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} y_n$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_n \cdot y_n\right) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n$ (звідси, враховуючи властивість 5, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(Cx_n\right) = C\lim\limits_{n\to\infty} x_n$);

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}$, якщо $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0$.

Доведемо, наприклад, властивість 2.

Припустимо, що послідовність $\{x_n\}$ має дві границі, *a* та *b*, і $a \neq b$.

Тоді одержимо для довільного фіксованого $\varepsilon > 0$:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow \exists n_1 : \left|x_n - a\right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n > n_1 \tag{2.3.1}$$

і

$$\lim_{n\to\infty} x_n = b \Rightarrow \exists n_2 : \left|x_n - b\right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n > n_2 \tag{2.3.2}$$

Очевидно, що $\forall n > n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ виконуються обидві нерівності (2.3.1) та (2.3.2).

Враховуючи це, оцінимо модуль різниці $|a-b|$:

$$0 \le |a-b| = |a - x_n + x_n - b| \le |x_n - a| + |x_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

звідки випливає, що $a - b = 0$, тобто $a = b$. Одержане протиріччя доводить, що наше припущення неправильне, а отже, у збіжної послідовності границя єдина.

В. Границя обмеженої монотонної послідовності. Число e

Розглядаючи приклади різних послідовностей, помічаємо, що серед обмежених послідовностей є як збіжні ($a_n = \frac{(-1)^n}{n}$), так і розбіжні ($b_n = (-1)^n$) послідовності. Так само й монотонні послідовності бувають збіжні ($x_n = \frac{1}{n}$) і розбіжні ($y_n = n$). Тобто ні сама обмеженість, ні сама монотонність послідовності не гарантують її збіжність. Зате послідовність, задана формулою $x_n = \frac{1}{n}$, є обмеженою, монотонною і збіжною. Виявляється, що це не випадковість, — має місце наступна теорема.

Теорема 2.3.1

Якщо послідовність обмежена і монотонна, то вона збіжна.

Доведення. Нехай послідовність $\{x_n\}$, для визначеності, неспадна (тобто $x_n \le x_{n+1}$). Тоді вона обмежена, а отже, має точну верхню межу (оскільки будь-яка обмежена множина має точні межі). Позначимо $\sup\{x_n\} = a$ і покажемо, що число a є границею послідовності $\{x_n\}$.

Візьмемо довільне $\varepsilon > 0$. Оскільки a — точна верхня межа послідовності $\{x_n\}$, то, згідно з її характеристичною властивістю, обов'язково знайдеться такий член цієї послідовності (нехай x_{n_0}), що міститься між a та $a - \varepsilon$, тобто:

$$a - \varepsilon < x_{n_0} \le a .$$

Враховуючи характер монотонності заданої послідовності, останню нерівність можна переписати так:

$$a-\varepsilon < x_{n_0} \le x_{n_0+1} \le x_{n_0+2} \le \ldots \le a < a+\varepsilon .$$

Тобто $\forall \varepsilon > 0$ і $\forall n \ge n_0$ виконується нерівність $a-\varepsilon < x_n < a+\varepsilon$, або те саме, що $|x_n - a| < \varepsilon$. А це й означає, що $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Для випадку незростаючої послідовності теорема доводиться аналогічно.

Прикладом обмеженої (зокрема числами 2 та 3) і монотонної (зростаючої) послідовності є послідовність $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Отже, вона має границю. Цю границю позначають символом *e* (позначення запровадив Ейлер). Доведено, що *e* — ірраціональне число; раціональне його наближення до десятих: $e \approx 2{,}7$.

А границю $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ називають другою важливою границею. Зустрічається вона, наприклад, у задачах фінансової математики про нарощення грошової суми на банківському рахунку при неперервному нарахуванні відсотків.

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. У чому помилка такого «означення» границі числової послідовності: «Число a є границею послідовності $\left\{x_n\right\}$, якщо для будь-якого ε > 0 і будь-якого натурального n виконується нерівність $\left|x_n - a\right| < \varepsilon$»? Відповідь обґрунтуйте.
2. Чи можна в означенні границі послідовності слова «для будь-якого ε > 0» замінити на слова «існує ε > 0»? Відповідь обґрунтуйте.
3. Що буде, коли в означенні границі послідовності слова «для будь-якого ε > 0» замінити на «для будь-якого ε»?
4. Чи правильне твердження: «Якщо сума двох числових послідовностей збіжна, то обидві послідовності збіжні»? Відповідь обґрунтуйте.
5. Чи коректно сформульовано твердження: «Границя суми двох послідовностей дорівнює сумі границь цих послідовностей, а границя їх добутку — добуткові границь»?
6. Яка послідовність називається нескінченно малою (нескінченно великою)? Чи правильні твердження: «Сума нескінченно малих послідовностей є нескінченно малою послідовністю»; «Сума нескінченно великих послідовностей є нескінченно великою послідовністю»?
7. Якими умовами для збіжності послідовності (необхідними, достатніми, необхідними і достатніми) є її: обмеженість; монотонність? Відповідь обґрунтуйте.

2.3.2. Ознаки збіжності дійсних числових рядів

(Ознаки збіжності додатних числових рядів. Абсолютно та умовно збіжні ряди, їх властивості. Достатня умова збіжності знакозмінного ряду)

А. Ознаки збіжності додатних числових рядів

Нехай маємо додатний числовий ряд (тобто ряд з невід'ємними членами):

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{2.3.3}$$

Вкажемо на кілька достатніх ознак його збіжності.

Перша ознака порівняння

Нехай, крім ряду (2.3.3), маємо додатний ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \tag{2.3.4}$$

і нехай для всіх n, починаючи з деякого, виконується нерівність $a_n \le b_n$. Тоді зі збіжності ряду (2.3.4) випливає збіжність ряду (2.3.3), а з розбіжності ряду (2.3.3) — розбіжність ряду (2.3.4).

Друга ознака порівняння

Нехай маємо додатні ряди: (2.3.3) та (2.3.4). І нехай $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k$, $0 < k < +\infty$ (тобто границя відношення відповідних членів рядів — додатне число). Тоді обидва ряди, (2.3.3) та (2.3.4), одночасно збіжні або розбіжні.

Щоб користуватися ознаками порівняння для дослідження збіжності ряду, потрібно мати інший ряд, про який ми знаємо, — збіжний він чи розбіжний. Такими (відомими) рядами найчастіше слугують гармонічний та узагальнений гармонічний ряди, геометрична прогресія. Наприклад, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10n-1}{(n+1)(n^2+3)}$ збіжний, бо збіжним є ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ і $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{10n-1}{(n+1)(n^2+3)}:\frac{1}{n^2}\right)=10$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-5}{3n^2-4n+5}$ розбіжний, бо розбіжним є ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ і $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n-1}{3n^2-4n+5}:\frac{1}{n}\right)=\frac{2}{3}$.

Наступні ознаки дають можливість з’ясувати збіжність (розбіжність) ряду без залучення інших рядів.

Ознака Даламбера

Нехай маємо додатний ряд (2.3.3), у якому $a_n > 0$, і $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=r$. Тоді, якщо $r < 1$, — ряд збіжний, при $r > 1$ (зокрема й нескінченність) — ряд розбіжний; якщо ж $r = 1$, то про збіжність (розбіжність) ряду висновку зробити не можна.

Ознака Коші

Нехай маємо додатний ряд (2.3.3) і $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=r$. Тоді, якщо $r < 1$, — ряд збіжний, при $r > 1$ (зокрема й нескінченність) — ряд розбіжний; якщо ж $r = 1$, то про збіжність (розбіжність) ряду висновку зробити не можна.

Інтегральна ознака Коші

Нехай маємо додатний ряд (2.3.3). І нехай функція $f(x)$, додатна і незростаюча на проміжку $[1; +\infty)$, набуває при $x = n$, $n \in N$, значень: $f(n) = a_n$. Тоді невласний інтеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} f\left(x\right)dx$ і ряд (2.3.3) одночасно збіжні або розбіжні.

Справедливість цієї ознаки «відчувається» з її геометричної ілюстрації (*рис. 2.3.1*). Ступінчаста фігура (площа якої дорівнює ряду (2.3.3)) і підграфік функції (площа якого — це невласний інтеграл) «зв'язані» між собою. Тому ці площі одночасно або є (тобто скінченні), або їх немає (тобто вони скінченними числами не виражаються).

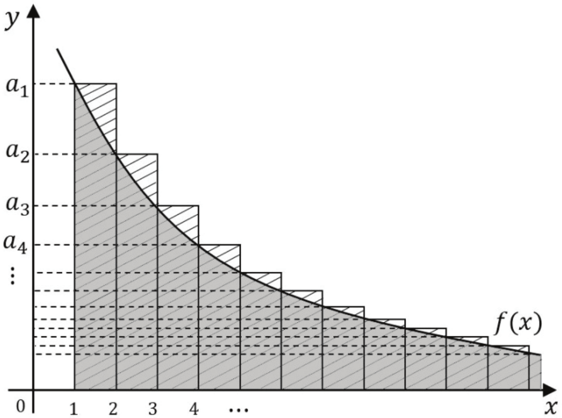


Рис. 2.3.1

Б. Абсолютно та умовно збіжні ряди, їх властивості

Нехай маємо недодатний ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \tag{2.3.5}$$

Утворимо ряд з модулів членів даного ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|c_n\right| \tag{2.3.6}$$

Має місце наступна **теорема**: якщо ряд (2.3.6) збіжний, то й ряд (2.3.5) збіжний.

У цьому випадку кажуть, що ряд (2.3.5) збігається абсолютно або що він абсолютно збіжний.

Прикладом абсолютно збіжного ряду є ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{2^n}$, оскільки ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin n|}{2^n}$, утворений з модулів його членів, — збіжний, що легко встановити за першою ознакою порівняння: $\frac{|\sin n|}{2^n}\le\frac{1}{2^n}$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ збіжний, як геометрична прогресія зі знаменником $q=\frac{1}{2}<1$.

Якщо ж ряд (2.3.6) розбіжний, а ряд (2.3.5) збіжний, то кажуть, що він умовно збіжний.

При дослідженні ряду на збіжність за допомогою зазначеної теореми слід пам'ятати, що вона дає лише достатні умови збіжності. Тобто, якщо ряд (2.3.6) розбіжний, то про збіжність ряду (2.3.5) нічого сказати не можна — він може бути як збіжний, так і розбіжний. Однак є виняток, корисний для практики: якщо розбіжність ряду (2.3.6) була встановлена за ознакою Даламбера або Коші, то можна стверджувати, що ряд (2.3.5) розбіжний.

Наприклад, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-n)^n}{n!}$ — розбіжний ряд, бо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$ розбіжний згідно з ознакою Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}:\frac{n^n}{n!}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n+1)^n n!}{(n+1)!n^n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e>1.$$

Які ж властивості абсолютно та умовно збіжних рядів? Природно порівнюватимемо їх із властивостями скінченних сум.

Наприклад, чи має місце для рядів переставна властивість? Якщо ряд абсолютно збіжний, то відповідь ствердна, тобто, якщо ряд збігається абсолютно, то ряд, утворений з нього довільною перестановкою членів, також збігається абсолютно і має ту ж саму суму, що й даний ряд. Натомість для умовно збіжного ряду переставна властивість не виконується. Більше того, теорема Рімана стверджує, що члени умовно збіжного ряду можна переставити місцями так, що в результаті дістанемо ряд з будь-якою наперед заданою сумою або навіть розбіжний ряд.

Виявляється також, що абсолютно збіжні ряди можна множити так само, як і суми скінченного числа доданків. Для умовно збіжних рядів таке правило застосовувати не можна — добуток рядів є або розбіжним рядом, або ж його сума не дорівнює добутку сум рядів-множників.

В. Знакозмінний ряд. Ознака Лейбніца

Серед недодатних рядів виділяють клас так званих знакозмінних рядів — рядів, знаки членів яких чергуються. Знакозмінний ряд запишемо у вигляді:

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{n-1} a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n,\ a_n > 0\ \forall n \in N \quad (2.3.7)$$

Має місце наступна ознака збіжності знакозмінного ряду.

Ознака Лейбніца. Ряд (2.3.7) збігається, якщо $a_{n+1} \le a_n$ і $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ (інакше кажучи, якщо члени знакозмінного ряду спадають до нуля).

Доведення. Нехай маємо знакозмінний ряд (2.3.7) і відомо, що послідовність $\{a_n\}$ неспадна і нескінченно мала. Довести, що ряд (2.3.7) збігається, означає переконатися, що існує скінченна границя послідовності його частинних сум.

Запишемо двома різними способами $2n$-ну частинну суму ряду:

$$S_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \ldots + (a_{2n-1} - a_{2n}) \quad (2.3.8)$$

та

$$S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \ldots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} \qquad (2.3.9)$$

Враховуючи, що послідовність $\{a_n\}$ неспадна, із (2.3.8) випливає $S_{2n} \geq 0$, а з (2.3.9) — $S_{2n} \leq a_1$. Об'єднуючи дві останні нерівності, одержимо: $0 \leq S_{2n} \leq a_1$, тобто послідовність «парних» частинних сум неспадна і обмежена. Тому вона має границю (позначимо її S): $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = S$.

Із очевидної рівності $S_{2n-1} = S_{2n} - a_{2n}$ і з того, що $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = 0$, одержимо:

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n-1} = \lim_{n\to\infty} (S_{2n} - a_{2n}) = \lim_{n\to\infty} S_{2n} - \lim_{n\to\infty} a_{2n} = S - 0 = S.$$

Тобто й послідовність «непарних» частинних сум збігається до S, а отже, уся послідовність $\{S_n\}$ має границю S. А це означає, що ряд (2.3.7) збігається.

Примітка. Зазначимо, що модуль суми збіжного знакозмінного ряду не перевищує модуля його першого члена. Цей факт використовується при наближених обчисленнях за допомогою рядів, бо він означає також, що $|S - S_n| \leq a_n$, і дозволяє оцінити абсолютну похибку наближення.

Приклад 2.3.1. Використаємо ознаку Лейбніца для дослідження збіжності ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ (це так званий ряд Лейбніца).

$a_n = \frac{1}{n}$, $a_{n+1} = \frac{1}{n+1}$; $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$, тобто $a_{n+1} < a_n$ і послідовність $\{a_n\}$ спадає. Крім того, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Отже, даний ряд збіжний (неважко переконатися, використовуючи розклад у ряд Маклорена функції $\ln(1+x)$, що його сума дорівнює $\ln 2 < a_1 = 1$).

Зазначимо, що ряд Лейбніца збігається умовно, бо ряд з модулів його членів $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ розбіжний (це гармонічний ряд).

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Чи правильні твердження:
   а) кожний числовий ряд має суму;
   б) ряд збігається, якщо його n-ний член прямує до нуля;
   в) ряд розбігається, якщо його n-ний член не прямує до нуля;
   г) якщо ряд збігається, то його n-ний член прямує до нуля;
   д) геометрична прогресія є збіжним рядом;
   е) ряд розбігається, якщо утворений з модулів його членів ряд розбігається;
   є) гармонічний ряд розбігається.
2. Скільки членів ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2^n}$ треба взяти, щоб обчислити його суму з точністю до 0,01? Обчисліть цю суму із зазначеною точністю.
3. Чи має ряд Лейбніца переставну властивість? Якщо так, то обґрунтуйте це. Якщо ні, то переставте в ньому члени так, щоб сума ряду збільшилася вдвічі.
4. Запишіть геометричну прогресію, сума якої дорівнює 3, а перший член дорівнює 2.
5. Дано ряд: $\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}-\frac{1}{2^3}+\ldots$ Чи можна дослідити його збіжність за ознакою Лейбніца? Чи збіжний цей ряд? Відповідь обґрунтуйте.

2.3.3. Показникова та логарифмічна функції дійсної й комплексної змінної: означення, властивості

А. Показникова функція дійсної змінної

Означення 2.3.3. Функція, задана формулою $y = a^x$, де $a > 0$, $a \neq 1$, називається *показниковою*.

Властивості показникової функції дійсної змінної

1. Область визначення — усі дійсні числа (випливає з означення степеня з дійсним показником).

2. Множина значень — додатні числа (випливає з означення степеня з дійсним показником).

3. Функція неперервна і диференційовна на множині R.

Доведемо, наприклад, диференційовність. Справді, нехай x — довільна точка множини R. Знайдемо границю відношення приросту функції в точці x до приросту аргументу, якщо останній прямує до нуля:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^x\left(a^{\Delta x} - 1\right)}{\Delta x} = a^x \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \ln a.$$

Отже, функція a^x диференційовна і її похідна обчислюється за формулою: $(a^x)' = a^x \ln a$. Зокрема, $(e^x)' = e^x$.

4. Функція зростає, якщо $a > 1$ і спадає при $0 < a < 1$.

Справді, $(a^x)' = a^x \ln a > 0$, якщо $a > 1$ і $(a^x)' < 0$, якщо $0 < a < 1$.

5. Функція оборотна (бо строго монотонна на всій області визначення).

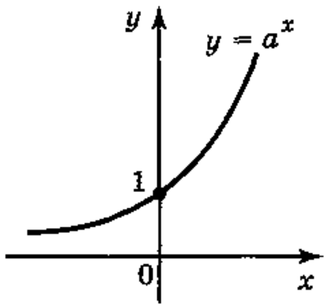
6. Екстремумів функція не має (оскільки тільки зростає або тільки спадає).

7. Графік функції опуклий вниз на всій дійсній осі; точок перегину не має.

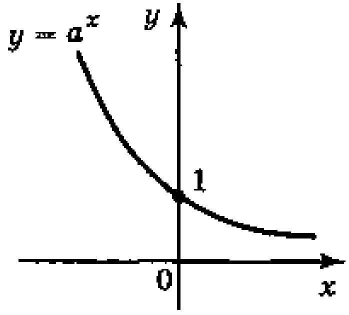
Справді, $(a^x)'' = a^x \ln^2 a > 0 \ \forall \ x \in R$.

8. $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = \begin{cases} +\infty, & a > 1, \\ 0, & 0 < a < 1; \end{cases} \qquad \lim\limits_{x \to -\infty} a^x = \begin{cases} 0, & a > 1, \\ +\infty, & 0 < a < 1. \end{cases}$

Схематичне зображення графіка показникової функції показано на *рис. 2.3.2 (а, б)*.



а)



б)

Рис. 2.3.2 (а, б). Графіки показникової функції:
а) при а > 1; б) при $0 < a < 1$

Графік функції $y = e^x$ має певну особливість, а саме: дотична до нього в точці (0;1) утворює з додатною піввіссю *Ox* кут 45° (*рис. 2.3.3*). Справді, кутовий коефіцієнт зазначеної дотичної дорівнює значенню похідної функції в точці $x = 0$, тобто, $k = e^0 = 1$, або те саме, що й $\text{tg}\alpha = 1$, звідки $\alpha = 45°$.

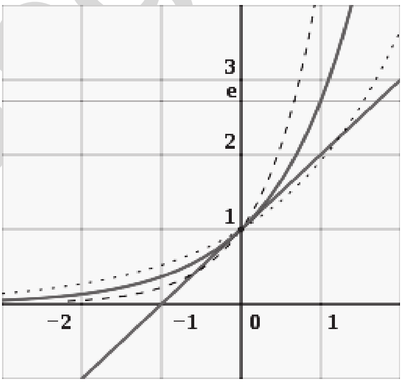


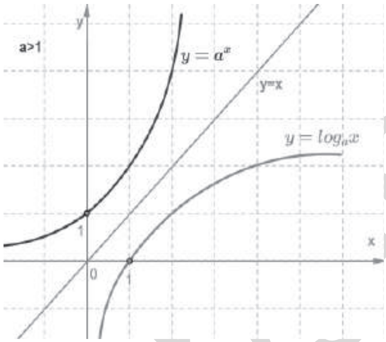
Рис. 2.3.3. Дотична до графіка функції $y = e^x$

Б. Логарифмічна функція дійсної змінної

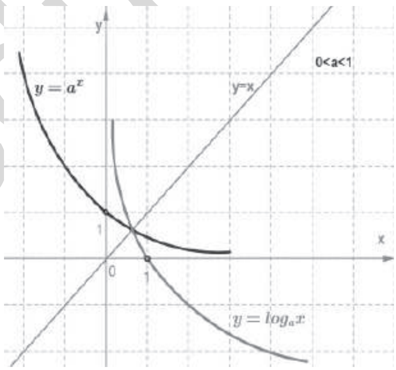
Оскільки показникова функція оборотна, то знайдемо обернену до неї функцію. Для цього виразимо з рівняння $y = a^x$ змінну x через y і поміняємо (для зручності) позначення. Одержимо: $x = \log_a y$, або $y = \log_a x$.

Функція, яку ми отримали, називається *логарифмічною*.

Як відомо, графіки взаємно обернених функцій, побудовані в одній і тій самій системі координат, симетричні відносно прямої $y = x$. Тому легко отримуємо графіки логарифмічної функції при $a > 1$ та при $0 < a < 1$, симетрично відобразивши відповідні графіки показникової функції відносно бісектриси першого і третього координатних кутів (*рис. 2.3.4 (а, б)*).



а)



б)

Рис. 2.3.4 (а, б). Графік логарифмічної функції

Неважко вказати й властивості логарифмічної функції як оберненої до показникової.

Властивості логарифмічної функції дійсної змінної

1. Область визначення — додатні числа.
2. Множина значень — усі дійсні числа.
3. Функція неперервна і диференційовна на множині $(0; +\infty)$;

$$\left(\log_a x\right)' = \frac{1}{x\ln a};\ \left(\ln x\right)' = \frac{1}{x}.$$

4. Функція зростає, якщо $a > 1$ і спадає при $0 < a < 1$.
5. Функція не має екстремумів.

В. Експоненціальна та логарифмічна функції комплексної змінної

Означення 2.3.4. Експоненціальною функцією комплексної змінної називається функція вигляду:

$$\omega = e^z = e^{x+iy} = e^x\left(\cos y + i\sin y\right) \qquad (2.3.10)$$

Властивості експоненціальної функції

1. Голоморфність. Функція $\omega = e^z$ визначена для всіх $z \in \mathbb{C}$ і є голоморфною в усій комплексній площині $\mathbb{C}$.

Доведення. Розглянемо функцію $\omega = e^z = e^x(\cos y + i\sin y) = = e^x\cos y + ie^x\sin y$ і покажемо, що вона диференційовна для всіх значень змінної z. З цією метою скористаємось теоремою про необхідні і достатні умови диференційовності функції комплексної змінної, згідно з якою функція комплексної змінної диференційовна, якщо її дійсна та уявна частини є диференційовними та задовольняють умови Коші-Рімана.

Дійсною частиною цієї функції є $u(x,y) = e^x\cos y$, а уявною — функція $v(x,y) = e^x\sin y$. Очевидно, що функції $u(x,y) = e^x\cos y$ і $v(x,y) = e^x\sin y$ диференційовні для всіх $(x;y) \in \mathbb{R}^2$.

Перевіримо виконання умов Коші-Рімана, які мають такий вигляд:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Знаходимо частинні похідні дійсної й уявної частин. Одержимо:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x\cos y,\ \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x\sin y,\ \frac{\partial v}{\partial x} = e^x\sin y,\ \frac{\partial v}{\partial y} = e^x\cos y.$$

Як бачимо, функції $u(x,y)=e^x\cos y$, $v(x,y)=e^x\sin y$ задовольняють умови Коші-Рімана для всіх значень $(x;y)\in\mathbb{R}^2$. Отже, функція $\omega=e^z$ голоморфна в усій комплексній площині $\mathbb{C}$, водночас і її похідна:

$$\omega'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=e^x\cos y+ie^x\sin y=e^{x+iy}=e^z.$$

За такою ж формулою обчислюють похідну показникової функції e^x дійсної змінної.

2. *Конформність.* Функція $\omega=e^z$ конформна в усій комплексній площині $\mathbb{C}$.

Доведення. Оскільки похідна експоненціальної функції має вигляд $\omega'(z)=e^z$, то для доведення конформності даної функції покажемо, що рівняння $e^z=0$ не має розв'язків в комплексній площині $\mathbb{C}$. Припустимо протилежне, а саме, що рівняння $e^z=0$ має розв'язок в комплексній площині $\mathbb{C}$. Це означає, що існують дійсні значення x, y, для яких виконується рівність:

$$e^{x+iy}=e^x\cos y+ie^x\sin y=0 \tag{2.3.11}$$

Розглянемо модуль лівої частини цієї рівності:

$$\left|e^{x+iy}\right|=\sqrt{\left(e^x\cos y\right)^2+\left(e^x\sin y\right)^2}=e^x.$$

Оскільки $e^x\neq 0$, то співвідношення (2.3.11) не може виконуватися, отже, рівняння $e^z=0$ розв'язків не має.

3. *Періодичність.* Функція $\omega=e^z$ є $2\pi i$-періодичною.

Доведення. Покажемо, що для експоненціальної функції існує таке відмінне від нуля комплексне число T, при якому виконується рівність $e^{z+T}=e^z$ для всіх значень $z\in\mathbb{C}$. Остання рівність рівносильна співвідношенню $e^T=1$, звідки отримуємо значення $T=i2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. Взявши $k=1$, знаходимо період експоненціальної функції. Отже, функція $\omega=e^z$ є $2\pi i$-періодичною.

4. *Області однолистості.* Нагадаємо, що голоморфна в області D функція $f(z)$ називається однолистою в області D, якщо для довільних z_1, $z_2 \in D$, таких, що $z_1 \neq z_2$ виконується умова $f(z_1) \neq f(z_2)$. Знайдемо області однолистості функції $\omega = e^z$. Для цього потрібно визначити такі точки $z_1 \neq z_2$, які задовольняють рівність $e^{z_1} = e^{z_2}$, тобто знайти умови, при яких рівняння $e^{z_1 - z_2} = 1$ має розв'язки. Це, очевидно, умова: $z_1 - z_2 = i2\pi k, k \in \mathbb{Z}$. Прикладом областей однолистості функції $\omega = e^z$ є множини $D_k = \{z \in \mathbb{C} : 2\pi k < \operatorname{Im} z < 2\pi(k+1)\}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Образи множин при відображенні $\omega = e^z$. Для того щоб визначити образ множини $D_k = \{z \in \mathbb{C} : 2\pi k < \operatorname{Im} z < 2\pi(k+1)\}$, $k \in \mathbb{Z}$, при відображенні за допомогою експоненціальної функції $\omega = e^z$, знайдемо образ прямої $z = x + i\alpha$, $x \in \mathbb{R}$, де $\alpha = const$, при дії на неї функцією $\omega = e^z$. Враховуючи рівність $\omega = e^z = e^{x+i\alpha} = e^x \cdot e^{i\alpha}$, $x \in \mathbb{R}$, бачимо, що пряма $z = x + i\alpha$, $x \in \mathbb{R}$, при відображенні $\omega = e^z$ переходить у промінь, який виходить із початку координат $z = 0$ під кутом α до додатної частини осі абсцис. Звідси випливає, що кожна множина $D_k = \{z \in \mathbb{C} : 2\pi k < \operatorname{Im} z < 2\pi(k+1)\}$, $k \in \mathbb{Z}$ при відображенні $\omega = e^z$ переходить у площину $\mathbb{C}$ із розрізом по додатній частині дійсної осі.

5. *Обернена функція.* Знайдемо функцію, обернену до функції $\omega = e^z$. Для цього виразимо змінну z через ω. З цією метою скористаємося експоненціальною формою запису комплексного числа. Одержимо $\omega = |\omega| e^{i \arg \omega}$. Тоді співвідношення $\omega = e^z$ перепишеться у вигляді:

$$\omega = |\omega| e^{i\arg\omega} = e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy},$$

звідки одержимо систему рівнянь:

$$\begin{cases} e^x = |\omega|, \\ y = \arg\omega + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \ln|\omega|, \\ y = \arg\omega + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Тепер можемо записати функцію z, обернену до функції $\omega = e^z$:

$$z = Ln\omega = \ln|\omega| + i(\arg\omega + 2\pi k),\ k \in \mathbb{Z} \tag{2.3.12}$$

Ця функція називається *логарифмічною функцією комплексної змінної або логарифмом комплексної змінної.*

Зауважимо, що функція (2.3.12) є багатозначною функцією, тобто для кожного $\omega \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ існує злічення кількість її значень. Тому виділяють однозначні гілки функції (2.3.12), тобто визначають функцію (2.3.12) при деякому конкретному значенні $k \in \mathbb{Z}$. Така гілка позначається $Ln_k\,\omega$. Зазначимо, що логарифмічна функція комплексної змінної, на відміну від логарифмічної функції дійсної змінної, визначена і для від'ємних значень аргументу.

Приклад 2.3.2. Обчислити значення $Ln(1+i)$ і виділити однозначну гілку логарифмічної функції з умови $Ln(-1) = 3\pi i$.

Розв'язання. Спочатку розглянемо однозначну гілку функції $Ln\omega$, для якої виконується умова $Ln(-1) = 3\pi i$. Підставивши значення $\omega = -1$ у співвідношення (2.3.12), знаходимо:

$$z = Ln(-1) = \ln|-1| + i(\arg(-1) + 2\pi k) = i(\pi + 2\pi k) = 3\pi i,$$

звідки отримуємо $k = 1$.

Отже, однозначна гілка логарифмічної функції, що визначається умовою $Ln(-1) = 3\pi i$, задається рівністю:

$$z = Ln_1\,\omega = \ln|\omega| + i(\arg\omega + 2\pi) \tag{2.3.13}$$

Обчислимо значення функції (2.3.13) в точці $\omega = 1 + i$.

Оскільки $|1+i| = \sqrt{2}$, $\arg(1+i) = \dfrac{\pi}{4}$, то:

$$z = Ln(1+i) = \ln|1+i| + i(\arg(1+i) + 2\pi) =$$
$$= \ln\sqrt{2} + i\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi\right) = \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{9\pi}{4}i.$$

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Дайте означення степеня з дійсним показником.
2. Яка властивість показникової функції дійсної змінної використовується в такому рівносильному переході: $a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$?
3. Чи рівносильні рівняння:

   $\ln\left(x^2 - 4x + 3{,}5\right) = \ln\left(1{,}5 - x\right)$ і $x^2 - 4x + 3{,}5 = 1{,}5 - x$?
4. Чи є періодичною експоненціальна функція комплексної змінної? Який її період?
5. Що є образом множини $z = x + i\pi$, $x \in \mathbb{R}$ при відображенні $\omega = e^z$?
6. Дайте означення логарифмічної функції комплексної змінної.
7. Обчисліть значення $Ln(1 + i\sqrt{3})$, виділивши однозначну гілку з умови $Ln(-1) = 3\pi i$.

2.3.4. Незалежність криволінійного інтеграла від форми шляху інтегрування

(Умови незалежності криволінійного інтеграла другого роду від форми шляху інтегрування. Формула Ньютона-Лейбніца. Відновлення функції за її повним диференціалом)

Із означення криволінійного інтеграла другого роду $\int\limits_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ випливає, що його значення залежить від функцій $P(x,y)$ та $Q(x,y)$, кривої інтегрування *L* та напряму інтегрування. Однак за певних умов такий інтеграл від форми шляху інтегрування не залежить, а залежить лише від початкової та кінцевої точок цього шляху. Відповідь на запитання, які це умови, дає наступна теорема.

Теорема 2.3.2

Нехай функції $P(x,y), Q(x,y)$ неперервні в області $D\subset R^2$.

Тоді еквівалентними є такі три умови:

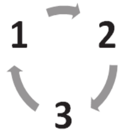
1. Для будь-якої замкненої кусково-гладкої кривої $\gamma\subset D$:

$$\oint\limits_{\gamma} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0.$$

2. Для будь-яких точок *A* та *B* області *D* значення інтеграла $\int\limits_{AB} P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ не залежить від кусково-гладкої кривої *AB*, яка міститься в *D*.

3. Вираз $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ є повним диференціалом деякої функції, визначеної в *D*.

Доведення проведемо за такою схемою:



Цим самим буде доведено, що будь-яка з умов є необхідною і достатньою для двох інших.

Перший крок: $1 \Rightarrow 2$.

Нехай виконується умова 1. Візьмемо дві довільні точки A та B області D і з'єднаємо їх кусково-гладкими кривими AmB та AnB, як показано на *рис. 2.3.5*.

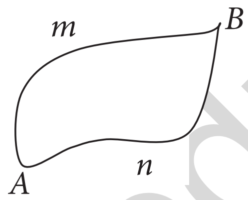


Рис. 2.3.5

Згідно з умовою 1 маємо:

$$\oint\limits_{AmBnA} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \qquad (2.3.14)$$

Але ж:

$$\oint\limits_{AmBnA} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \oint\limits_{AmB} Pdx + Qdy + \oint\limits_{BnA} Pdx + Qdy =$$

$$= \oint\limits_{AmB} Pdx + Qdy - \oint\limits_{AnB} Pdx + Qdy\,,$$

звідки, враховуючи (2.3.14), записуємо:

$$\int\limits_{AmB} Pdx + Qdy = \int\limits_{AnB} Pdx + Qdy\,.$$

Тобто виконується умова 2.

Другий крок: 2 $\Rightarrow$ 3.

Нехай $M_0(x_0; y_0)$ — фіксована, а $M(x; y)$ — довільна точки області D, M_0M — довільна кусково-гладка крива, яка повністю міститься в D *(рис. 2.3.6)*.

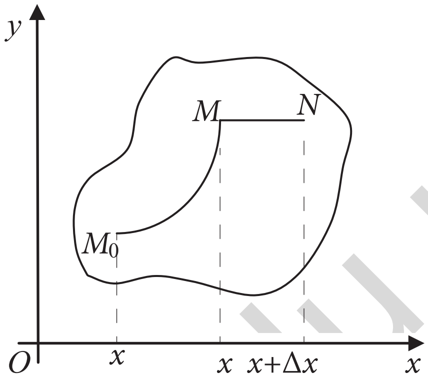


Рис. 2.3.6

Оскільки за умовою 2 інтеграл $\int\limits_L Pdx + Qdy$ не залежить від форми кривої L, то $\int\limits_{M_0M} Pdx + Qdy$ є функцією точки $M(x; y)$; позначимо її $U(x; y)$.

Отже:

$$U(x;y) = \int\limits_{M_0M} Pdx + Qdy \qquad (2.3.15)$$

Покажемо, що функція $U(x; y)$ є саме тією диференційовною функцією, повний диференціал якої дорівнює виразу $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$. Це й буде означати виконання умови 3.

Для доведення досить переконатися, що в кожній точці $M(x;\,y)$ області D існують неперервні частинні похідні $\dfrac{\partial U}{\partial x}$ та $\dfrac{\partial U}{\partial y}$, причому:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P(x;y),\ \frac{\partial U}{\partial y} = Q(x;y) \qquad (2.3.16)$$

Зафіксуємо точку $M(x;\,y)$ і надамо змінній x ненульового приросту Δx настільки малого, щоб точка $N(x+\Delta x;y)$ і увесь відрізок MN не вийшли за межі області D. Знайдемо частковий приріст функції U, використовуючи позначення (2.3.15):

$$\Delta_x U = U(x+\Delta x;y) - U(x;y) = \int\limits_{M_0MN} Pdx + Qdy -$$

$$- \int\limits_{M_0M} Pdx + Qdy = \int\limits_{MN} Pdx + Qdy = \int\limits_{MN} Pdx,$$

бо y на відрізку MN стала, тому $dy = 0$.

Зведемо останній інтеграл до звичайного і дістанемо:

$$\Delta_x U = \int\limits_{MN} P(x;y)dx = \int\limits_{x}^{x+\Delta x} P(x;y)dx = \int\limits_{x}^{x+\Delta x} P(t;y)dt.$$

Застосовуючи до останнього інтеграла теорему про середнє, одержимо:

$$\Delta_x U = P(x+\theta\Delta x;y)\Delta x \text{, де } 0<\theta<1,$$

звідки:

$$\frac{\Delta_x U}{\Delta x} = P(x+\theta\Delta x;y),\ 0<\theta<1.$$

Перейдемо в останній рівності до границі при $\Delta x \to 0$:
$\dfrac{\partial U}{\partial x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} P\left(x + \theta\Delta x; y\right) = P\left(x; y\right)$, бо, за умовою, *P (x; y)* — неперервна в області *D*.

Аналогічно доводиться, що існує неперервна в кожній точці $\left(x; y\right) \in D$ частинна похідна по *y*; вона дорівнює:
$\dfrac{\partial U}{\partial y} = Q\left(x; y\right)$.

Тому вираз $P\left(x, y\right)dx + Q\left(x, y\right)dy \dfrac{\partial U}{\partial y} = Q\left(x; y\right)$ є повним диференціалом деякої функції, і ця функція має вигляд: $U\left(x; y\right) = \int\limits_{M_0M} Pdx + Qdy$, що й треба було довести.

Примітка. Використовуючи (2.3.15), знайдемо криволінійний інтеграл $\int\limits_{AB} P\left(x, y\right)dx + Q\left(x, y\right)dy$, якщо він не залежить від форми кривої інтегрування.

Нехай крива *AB* задана параметрично рівняннями:
$x = x\left(t\right)$, $y = y\left(t\right)$, $t \in \left[\alpha; \beta\right]$, причому $t = \alpha \to A$, $t = \beta \to B$, тобто $A\left(x\left(\alpha\right); y\left(\alpha\right)\right)$, $B\left(x\left(\beta\right); y\left(\beta\right)\right)$. Маємо:

$$\int\limits_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} [P\left(x(t), y(t)\right)x'(t) +$$

$$+Q\left(x(t), y(t)\right)y'(t)]dt = \int\limits_{\alpha}^{\beta}\left[\frac{\partial U}{\partial x}x'(t) + \frac{\partial U}{\partial y}y'(t)\right]dt = \qquad (2.3.17)$$

$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta} U'dt = U\left(x\left(t\right); y\left(t\right)\right)\Big|_{\alpha}^{\beta} = U\left(x\left(\beta\right); y\left(\beta\right)\right) - U\left(x\left(\alpha\right); y\left(\alpha\right)\right) =$$

$$= U(B) - U(A)$$

Функцію $U(x;\ y)$ називають первісною для $Pdx + Qdy$, а формулу (2.3.17) — формулою Ньютона-Лейбніца для криволінійного інтеграла.

Якщо криволінійний інтеграл не залежить від форми кривої інтегрування AB, то його прийнято позначати: $\int\limits_A^B Pdx + Qdy$, або $\int\limits_{(x_A;y_A)}^{(x_B;y_B)} Pdx + Qdy$.

Третій крок: $3 \Rightarrow 1$.

Отже, якщо вираз $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ є повним диференціалом деякої функції, визначеної в D, то для будь-якої замкненої кусково-гладкої кривої $\gamma \subset D$:

$$\oint\limits_\gamma P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0.$$

Це твердження легко випливає із щойно встановленої формули (2.3.17). Справді, якщо крива замкнена, то можна вважати, що її початок і кінець — одна й та сама точка A. Тоді:

$$\oint\limits_\gamma P(x,y)dx + Q(x,y)dy = U(A) - U(A) = 0.$$

Теорему доведено повністю.

Важливо зазначити, що для однозв'язних областей є зручний для перевірки критерій незалежності інтеграла від форми шляху інтегрування.

Теорема 2.3.3

Нехай функції *P(x, y), Q(x, y)* та їх частинні похідні $\dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y}$ та $\dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$ — неперервні в однозв'язній області D. Тоді кожна із трьох умов теореми 2.3.2 рівносильна умові $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ для всіх точок $(x; y) \in D$.

Приклад 2.3.3. Обчислити $\int\limits_{\left(\frac{\pi}{4};2\right)}^{\left(\frac{\pi}{6};1\right)} 2y\sin 2x dx-\cos 2x dy = I$.

Розв'язання. Переконаємося спочатку, що інтеграл не залежить від форми кривої, яка з'єднує точки $\left(\dfrac{\pi}{4};2\right)$ і $\left(\dfrac{\pi}{6};1\right)$.

Справді, $P = 2y\sin 2x$; $Q = -\cos 2x$; $\dfrac{\partial P}{\partial y}=2\sin 2x=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ — диференційовні функції в усіх точках координатної площини, $\dfrac{\partial P}{\partial y}\equiv\dfrac{\partial Q}{\partial x}$, для всіх (x, y). Інтеграл не залежить від форми кривої інтегрування, тому оберемо зручний шлях, а таким є ламана, ланки якої паралельні координатним осям *(рис. 2.3.7)*.

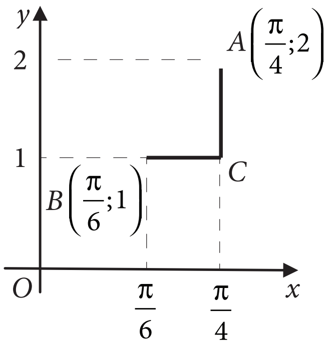


Рис. 2.3.7

Одержимо:

$$I = \int\limits_{ACB} 2y\sin 2x dx - \cos 2x dy = \int\limits_{AC} \ldots + \int\limits_{CB} \ldots = 0 + \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{6}} 2\sin 2x dx =$$

$$= -\cos 2x \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{6}} = -\cos\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Примітка. Зауважимо, що всі умови теореми суттєві. У цьому переконує, наприклад, інтеграл $\int\limits_{x^2+y^2=R^2} \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2}$.

Маємо:

$$P = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \quad Q = \frac{x}{x^2 + y^2},$$

$$P_y{}' = \frac{y^2 - x^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2}, \quad Q_x{}' = \frac{y^2 - x^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2}; \quad P_y{}' \equiv Q_x{}'.$$

Обчислимо інтеграл. Параметричні рівняння кола (кривої інтегрування): $x = R\cos t$, $y = R\sin t$, $t \in [0; 2\pi]$.

Одержимо:

$$\int\limits_{x^2+y^2=R^2} \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2} = \int\limits_0^{2\pi} \frac{-R\sin t \cdot (-R\sin t) + R\cos t \cdot R\cos t}{R^2} dt =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} dt = 2\pi \neq 0.$$

Результат (інтеграл по замкненій кривій відмінний від нуля) пояснюється тим, що функції P, Q, P'_y, Q'_x невизначені в початку координат (*рис. 2.3.8*), тобто область, у якій зазначені функції неперервні, не є однозв'язною (має виколену точку).

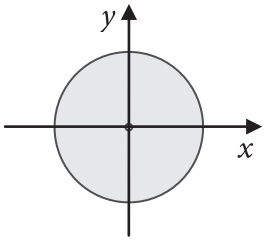


Рис. 2.3.8

Примітка. Якщо точки A та B розташовані в області D так, що ламана, яка їх з'єднує і складається лише з двох ланок, не міститься цілком у даній області (пунктирна ламана), то ламану AB треба утворити з більшої кількості ланок (суцільна ламана), але щоб вона повністю містилася в D, як на *рис. 2.3.9*.

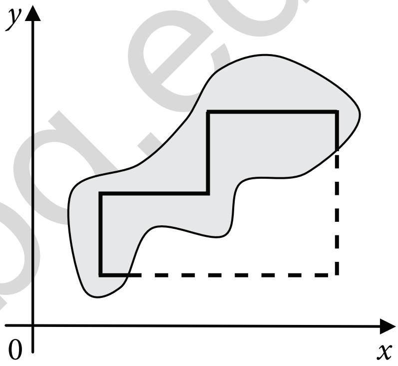


Рис. 2.3.9

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Чи правильно, що $\oint f(x)dx + g(y)dy = 0$ незалежно від всюди неперервних функцій f та g і вигляду замкненої кривої інтегрування? Відповідь обґрунтуйте.
2. Сформулюйте теорему 2.3.2. У чому ідея її доведення?
3. Який критерій незалежності криволінійного інтеграла від форми кривої інтегрування зручний для практичної його перевірки? Який критерій перевірити практично неможливо?
4. Як за допомогою криволінійного інтеграла відновити функцію $U(x, y)$ за її повним диференціалом $dU(x, y)$? Який інший спосіб такого відновлення ви знаєте? Опишіть його.
5. Перевірте, чи є повним диференціалом деякої функції вираз $(2xy - 3y^2 + 5y)dx + (x^2 - 6xy + 5x + 4)dy$. Якщо ні, — поясніть чому, якщо так, — відновіть саму функцію.
6. Що таке первісна для виразу $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$? Чи завжди вона існує? Як її знайти?

2.3.5. Голоморфні функції. Нулі голоморфних функцій. Гармонічні функції

(Означення диференційовної в точці функції комплексної змінної. Критерій диференційовності. Голоморфні функції. Нулі голоморфної функції. Означення гармонічної функції та спряженої пари гармонічних функцій)

А. Поняття диференційовної функції комплексної змінної в точці

Нехай D область в $\mathbb{C}$, $z_0 = x_0 + iy_0 \in D$, $f: D \to \mathbb{C}$, $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$.

Означення 2.3.5. Якщо існує скінченна границя відношення приросту функції в точці z_0 до приросту аргументу, коли приріст аргументу прямує до нуля:

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f\left(z_0\right)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f\left(z_0 + \Delta z\right) - f\left(z_0\right)}{\Delta z}, \qquad (2.3.18)$$

то ця границя називається похідною функції $f(z)$ в точці z_0 і позначається $f'\left(z_0\right)$.

Означення 2.3.6. Функція $f(z)$ називається диференційовною в точці z_0, якщо існує таке число $A \in \mathbb{C}$, при якому має місце співвідношення:

$$\Delta f\left(z_0\right) = A(z_0)\Delta z + o(\Delta z), \quad \text{де } \Delta z \to 0 \qquad (2.3.19)$$

Нагадаємо, що запис $f(z) = o(g(z)),\ z \to z_0$ означає, що $\lim\limits_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = 0.$

Означення похідної і диференційовної функції комплексної змінної нічим не відрізняється від відповідних означень для випадку функції дійсної змінної. Як і для функцій дійсної змінної, для функцій комплексної змінної має місце критерій диференційовності: *для того щоб функція f(z) була диференційовною в точці* z_0, *необхідно і достатньо, щоб функція f(z) мала похідну в точці* z_0. *При чому у формулі (2.3.19) стала* $A(z_0) = f'(z_0)$.

З означення похідної функції комплексної змінної випливають наступні властивості, які аналогічні властивостям похідної для функцій дійсної змінної:

1. Якщо $f(z) = const$, то $f'(z) = 0$.

2. Якщо c — константа, то $(cf(z))' = cf'(z)$.

3. $(f(z) + g(z))' = f'(z) + g'(z)$.

4. $\left(\dfrac{f(z)}{g(z)}\right)' = \dfrac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g^2(z)}$, $g(z) \neq 0$.

5. Нехай $f(z)$ має похідну в точці z_0, а функція $\varphi(\omega)$ має похідну в точці $\omega_0 = f(z_0)$. Тоді функція $\varphi(f(z_0))$ має похідну в точці z_0 і $\varphi'(f(z_0)) = \varphi'(\omega_0) f'(z_0)$.

Б. Критерій диференційовності функції

Критерій диференційовності функції комплексної змінної можна сформулювати у термінах її дійсної та уявної частин.

Теорема 2.3.4. *Необхідні і достатні умови диференційовності функції комплексної змінної*

Функція $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ диференційовна в точці $z_0=x_0+iy_0$ тоді і тільки тоді, коли функції $u(x,y)$ та $v(x,y)$ дійсних змінних x та y є диференційовними в точці (x_0,y_0) і виконуються умови Коші-Рімана:

$$\frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial x}=\frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial y},\ \frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial y}=-\frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial x}. \quad (2.3.20)$$

У той же час похідну від функції комплексної змінної можна знайти за допомогою формул:

$$f'(z_0)=\frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial x}+i\frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial x}=\frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial y}-i\frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial y},$$

які можна отримати з використанням умов Коші-Рімана (2.3.20).

Доведення.

Необхідність. Покажемо спочатку, що якщо функція $f(z)$ диференційовна в точці z_0, то функції $u(x,y)$, $v(x,y)$ диференційовні в точці (x_0,y_0) і для них виконуються умови Коші-Рімана.

Оскільки функція $f(z)$ диференційовна в точці z_0, то функція $f(z)$ має похідну в точці z_0, тобто існує границя:

$$f'(z_0)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f(z_0)}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}= \quad (2.3.21)$$

$$=\lim_{\Delta x+i\Delta y\to 0}\frac{u(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)+iv(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-\left(u(x_0,y_0)+iv(x_0,y_0)\right)}{\Delta x+i\Delta y}$$

Обчислимо границю (2.3.21) для випадків, коли спочатку $\Delta z = \Delta x$, а потім $\Delta z = i\Delta y$. Одержимо:

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) + iv(x_0 + \Delta x, y_0) - (u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0))}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0)}{\Delta x} + i \frac{v(x_0 + \Delta x, y_0) - v(x_0, y_0)}{\Delta x} \right) =$$

$$= \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} + i \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x} \qquad (2.3.22)$$

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} =$$

$$= \lim_{i\Delta y \to 0} \frac{u(x_0, y_0 + \Delta y) + iv(x_0, y_0 + \Delta y) - (u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0))}{i\Delta y} = v(x, y)$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \left(\frac{u(x_0, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)}{i\Delta y} + i \frac{v(x_0, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)}{i\Delta y} \right) =$$

$$= -i \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y} + \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial y} \qquad (2.3.23)$$

Прирівнюючи дійсні та уявні частини співвідношень (2.3.22), (2.3.23), отримаємо умови Коші-Рімана:

$$\frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} = \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial y},$$

$$\frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x} = -\frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y}.$$

Таким чином, з припущення про диференційовність функції $f(z)$ випливають умови Коші-Рімана.

Покажемо, що функції $u(x,y)$, $v(x,y)$ є диференційовними в точці (x_0, y_0). Для цього розглянемо приріст функції $f(z)$ та скористаємося означенням диференційовної функції в точці z_0. Дістанемо:

$$\Delta f(z_0) = \Delta u(x_0, y_0) + i\Delta v(x_0, y_0) =$$

$$= f'(z_0)\Delta z + o(\Delta z) = \left(\frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} + i\frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x}\right)(\Delta x + i\Delta y) + \varepsilon_1(\Delta z) + i\varepsilon_2(\Delta z) =$$

$$= \left(\frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x}\Delta x - \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x}\Delta y + \varepsilon_1(\Delta z)\right) +$$

$$+ i\left(\frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x}\Delta y + \varepsilon_2(\Delta z)\right).$$

Звідси, враховуючи умови Коші-Рімана (2.3.20), знаходимо:

$$\Delta f(z_0) = \Delta u(x_0, y_0) + i\Delta v(x_0, y_0) =$$

$$= \left(\frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y}\Delta y + \varepsilon_1(\Delta z)\right) +$$

$$+ i\left(\frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial y}\Delta y + \varepsilon_2(\Delta z)\right).$$

Прирівнюючи дійсні та уявні частини отриманого співвідношення, одержимо:

$$\Delta u(x_0, y_0) = \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y}\Delta y + \varepsilon_1(\Delta z),$$

$$\Delta v(x_0, y_0) = \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial y}\Delta y + \varepsilon_2(\Delta z),$$

де $\varepsilon_1(\Delta z)+i\varepsilon_2(\Delta z)=o(\Delta z)$, $\Delta z\to 0$.

$$\lim_{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\to 0}\frac{\varepsilon_2(\Delta z)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=0\,.$$

Оскільки $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{\varepsilon_1(\Delta z)}{\Delta z}=0$ і $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{\varepsilon_2(\Delta z)}{\Delta z}=0$, тоді і тільки тоді, коли $\lim\limits_{|\Delta z|\to 0}\dfrac{\varepsilon_1(\Delta z)}{|\Delta z|}=0$ і $\lim\limits_{|\Delta z|\to 0}\dfrac{\varepsilon_2(\Delta z)}{|\Delta z|}=0$, що еквівалентно умовам

$$\lim_{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\to 0}\frac{\varepsilon_1(\Delta z)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=0 \text{ і } \lim_{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\to 0}\frac{\varepsilon_2(\Delta z)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=0$$

відповідно, то:

$$\varepsilon_1(\Delta z)=o\left(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\right),\ \varepsilon_2(\Delta z)=o\left(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\right).$$

Звідси:

$$\Delta u(x_0,y_0)=\frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial y}\Delta y+o\left(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\right),$$

$$\Delta v(x_0,y_0)=\frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial y}\Delta y+o\left(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\right),$$

тобто функції $u(x,y)$, $v(x,y)$ диференційовні в точці (x_0,y_0).

Достатність. Нехай функції $u(x,y)$, $v(x,y)$ диференційовні в точці (x_0,y_0) і задовольняють в цій точці умови Коші-Рімана. Покажемо, що функція $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, де $z=x+iy$, диференційовна в точці $z_0=x_0+iy_0$. Оскільки функції $u(x,y)$, $v(x,y)$ диференційовні в точці (x_0,y_0), то за означенням диференційовності функції двох змінних отримаємо:

$$\Delta u(x_0, y_0) = \frac{\partial u\left(x_0, y_0\right)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u\left(x_0, y_0\right)}{\partial y}\Delta y + o\left(\sqrt{\left(\Delta x\right)^2 + \left(\Delta y\right)^2}\right),$$

$$\Delta v(x_0, y_0) = \frac{\partial v\left(x_0, y_0\right)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v\left(x_0, y_0\right)}{\partial y}\Delta y + o\left(\sqrt{\left(\Delta x\right)^2 + \left(\Delta y\right)^2}\right).$$

Тоді:

$$\Delta u(x_0, y_0) + i\Delta v(x_0, y_0) =$$

$$= \frac{\partial u\left(x_0, y_0\right)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u\left(x_0, y_0\right)}{\partial y}\Delta y + o\left(\sqrt{\left(\Delta x\right)^2 + \left(\Delta y\right)^2}\right) +$$

$$+ i\left(\frac{\partial v\left(x_0, y_0\right)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v\left(x_0, y_0\right)}{\partial y}\Delta y + o\left(\sqrt{\left(\Delta x\right)^2 + \left(\Delta y\right)^2}\right)\right).$$

Звідси, враховуючи умови Коші-Рімана, знаходимо:

$$\Delta u(x_0, y_0) + i\Delta v(x_0, y_0) =$$

$$= \frac{\partial u\left(x_0, y_0\right)}{\partial x}\Delta x - \frac{\partial v\left(x_0, y_0\right)}{\partial x}\Delta y + o\left(\sqrt{\left(\Delta x\right)^2 + \left(\Delta y\right)^2}\right) +$$

$$+ i\left(\frac{\partial v\left(x_0, y_0\right)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u\left(x_0, y_0\right)}{\partial x}\Delta y + o\left(\sqrt{\left(\Delta x\right)^2 + \left(\Delta y\right)^2}\right)\right) =$$

$$= \frac{\partial u\left(x_0, y_0\right)}{\partial x}(\Delta x + i\Delta y) + i\frac{\partial v\left(x_0, y_0\right)}{\partial x}(\Delta x + i\Delta y) + o\left(\sqrt{\left(\Delta x\right)^2 + \left(\Delta y\right)^2}\right) =$$

$$= \left(\frac{\partial u\left(x_0, y_0\right)}{\partial x} + i\frac{\partial v\left(x_0, y_0\right)}{\partial x}\right)(\Delta x + i\Delta y) + o\left(\sqrt{\left(\Delta x\right)^2 + \left(\Delta y\right)^2}\right) =$$

$$= A(\Delta z) + o\left(\sqrt{\left(\Delta x\right)^2 + \left(\Delta y\right)^2}\right),$$

де $o\left(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}\right) = o(|\Delta z|) = o(\Delta z)$.

Отже, функція $f(z)$ є диференційовною в точці $z_0 = x_0 + iy_0$.

Теорему доведено.

B. Поняття голоморфної функції

Одним з важливих понять комплексного аналізу є поняття голоморфної функції.

Означення 2.3.7. Функція $f(z)$ називається голоморфною (аналітичною) в точці z_0, якщо вона диференційовна в деякому околі точки z_0.

Означення 2.3.8. Функція $f(z)$ називається голоморфною в точці $z = \infty$, якщо функція $g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$ голоморфна в точці $z = 0$.

Означення 2.3.9. Функція $f(z)$ називається голоморфною в області D, якщо вона голоморфна в кожній точці області D.

Означення 2.3.10. Голоморфна в області D функція $f(z)$ називається однолистою в області D, якщо для довільних $z_1, z_2 \in D$ таких, що $z_1 \neq z_2$ виконується умова $f(z_1) \neq f(z_2)$.

Із означення 2.3.7 випливає, що для того аби функція $f(z)$ була голоморфною (аналітичною) в точці z_0, недостатньо, щоб у цій точці існувала її похідна $f'(z_0)$. Потрібно, щоб похідна існувала й у деякому околі точки z_0.

Приклад 2.3.4

1. Функція $w = z^2$ диференційовна і голоморфна в будь-якій точці z комплексної площини, бо похідна функції $w = z^2$ дорівнює:

$$w'(z) = \left(z^2\right)' = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\left(z + \Delta z\right)^2 - z^2}{\Delta z} =$$
$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{z^2 + 2z\Delta z + \left(\Delta z\right)^2 - z^2}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \left(2z + \Delta z\right) = 2z .$$

Як бачимо, вона існує для всіх комплексних z. Тому функція є голоморфною (аналітичною) в усій комплексній площині.

2. Функція $f(z) = z\overline{z}$ не є голоморфною (аналітичною) в жодній точці комплексної площини, хоча ця функція є диференційовною в точці $z = 0$. Справді, $f(z) = \left(x + iy\right)\left(x - iy\right) = x^2 + y^2$, тобто $u\left(x, y\right) = x^2 + y^2$, $v\left(x, y\right) = 0$. Очевидно, що функції $u\left(x, y\right), v\left(x, y\right)$ — диференційовні в будь-якій точці $\left(x, y\right) \in \mathbb{R}^2$. Але умови Коші-Рімана $\begin{cases} 2x = 0, \\ 2y = 0 \end{cases}$ виконуються лише в точці $\left(0,0\right)$.

Отже, функція $f(z) = z\overline{z}$ диференційовна в точці $z = 0$, проте не є голоморфною в жодній точці, оскільки немає точки, в околі якої функція є диференційовною.

Г. Нулі голоморфних функцій

При вивченні властивостей голоморфних функцій часто використовується поняття нуля функції.

***Означення* 2.3.11.** Нехай функція $f(z)$ голоморфна в області Ω. Точка $z = a \in \Omega$ називається нулем функції $f(z)$, якщо $f(a) = 0$.

Має місце така теорема про зображення голоморфної функції в околі нуля.

Теорема 2.3.5. ***Про вигляд голоморфної функції в околі нуля***

Нехай функція $f(z)$, голоморфна в області Ω, не є тотожно рівною нулеві, а в точці $z = a \in \Omega$ дорівнює нулеві, тобто $f(a) = 0$. Тоді існують єдине число $m \in \mathbb{N}$ та голоморфна в деякому околі $B_R(a)$ точки $z = a \in \Omega$ функція $\psi(z)$, така, що $\psi(z) \neq 0$ для всіх $z \in B_R(a)$ і в околі $B_R(a)$ має місце зображення (запис) функції $f(z)$ формулою $f(z) = (z-a)^m \psi(z)$.

Число $m \in \mathbb{N}$ в теоремі 2.3.5. називається порядком нуля функції $f(z)$.

Порядок нуля можна визначити також наступним способом.

Нехай $z = a \in \Omega$ — нуль функції $f(z)$, тобто $f(a) = 0$. Якщо $z = a$ — нуль функції $f(z)$ порядку m, то виконуються рівності:

$$f(a) = f'(a) = f''(a) = \ldots = f^{(m-1)}(a) = 0, \; f^{(m)}(a) \neq 0.$$

Приклад 2.3.5. Визначити порядок нуля функції $f(z) = \cos z - 1$ в точці $z = 0$.

Розв'язання. Оскільки $f(z)\big|_{z=0} = \cos z\big|_{z=0} - 1 = 0$ та $f'(z)\big|_{z=0} = -\sin z\big|_{z=0} = 0$, але $f''(z)\big|_{z=0} = -\cos z\big|_{z=0} = -1$, то точка $z=0$ є нулем другого порядку для функції $f(z)=\cos z-1$.

Означення 2.3.12. Точка $z=\infty$ називається нулем порядку m голоморфної в точці $z=\infty$ функції $f(z)$, якщо точка $z_0=0$ є нулем порядку m функції $g(z)=f\left(\frac{1}{z}\right)$. Водночас вважаємо, що $g(z)=z^m\psi(z)=\frac{1}{z^m}\psi\left(\frac{1}{z}\right)$, $|z|>R$.

Наприклад, точка $z=\infty$ є нулем порядку 3 для функції $f(z)=\frac{1}{z^3}\cos\frac{1}{z}$. Це випливає з того, що при $z\to\infty$ дана функція прямує до нуля (за рахунок множника $\frac{1}{z^3}$ та співвідношення $\lim\limits_{z\to\infty}\cos\frac{1}{z}=1$).

Д. Гармонічні функції

Означення 2.3.13. Нехай D — область в $\mathbb{R}^2$. Двічі неперервно диференційовна в області D функція $g=g(x,y)$ називається гармонічною, якщо ця функція задовольняє рівняння Лапласа, тобто виконується умова:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=0.$$

Записане вище рівняння називається рівнянням Лапласа, яке належить до важливих рівнянь класичної математичної фізики.

Означення 2.3.14. Гармонічні функції g, f називаються спряженими гармонічними функціями, якщо g, f задовольняють умови Коші-Рімана (2.3.20).

Має місце теорема про властивості функцій $u(x,y), v(x,y)$, які є дійсною та уявною частиною голоморфної функції.

Теорема 2.3.6

Нехай функція $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ диференційовна в області D, а функції $u(x,y), v(x,y)$ є двічі неперервно диференційовними у відповідних областях з $D_1 \in \mathbb{R}^2$. Тоді функції $u(x,y), v(x,y)$ є спряженими гармонічними функціями в області D_1 .

Доведення. Оскільки функція $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, як функція комплексної змінної z, диференційовна в області D, то для функцій $u(x,y)$, $v(x,y)$, як функцій дійсних змінних *x*, *y*, виконуються умови Коші-Рімана:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}; \tag{2.3.24}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y} \tag{2.3.25}$$

Враховуючи умову про двічі неперервну диференційовність функцій $u(x,y), v(x,y)$, рівність (2.3.24) можна продиференціювати за змінною *x*, а рівність (2.3.25) — за змінною *y*. Тоді отримаємо:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}=-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Звідки, додаючи ці рівності, знаходимо:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}-\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}=0\,.$$

Тобто функція $u(x,y)$ є гармонічною, оскільки ця функція задовольняє рівняння Лапласа.

Аналогічно доводиться, що функція $v(x,y)$ теж є гармонічною.

Оскільки функції $u(x,y)$, $v(x,y)$ задовольняють умови Коші-Рімана, то $u(x,y)$, $v(x,y)$ є спряженими гармонічними функціями.

Теорему доведено.

За дійсною або уявною частиною голоморфної функції можна відновити відповідно її уявну або дійсну частину.

Має місце наступне твердження.

Теорема 2.3.7

Нехай $u(x,y)$ — гармонічна функція в однозв'язній області *D*. Тоді існує гармонічна в області *D* функція $v(x,y)$, така, що функції $u(x,y)$, $v(x,y)$ є спряженими гармонічними функціями.

Розглянемо застосування теорем 2.3.6 та 2.3.7 на прикладі.

Приклад 2.3.6. Визначити голоморфну в області $\mathbb{C}$ функцію $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, якщо її дійсна частина має вигляд $u(x,y)=x^2-y^2$.

Оскільки функція $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ є голоморфною в області $\mathbb{C}$, то функції $u(x, y)$, $v(x, y)$ є спряженими гармонічними функціями, і одну з них можна знайти за іншою.

Використовуючи умови Коші-Рімана, знаходимо:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x = \frac{\partial v}{\partial y}; \tag{2.3.26}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -2y = -\frac{\partial v}{\partial x} \tag{2.3.27}$$

Інтегруючи тотожну рівність (2.3.26), отримуємо:

$$v(x, y) = \int 2x\, dy + C(x) = 2xy + C(x), \tag{2.3.28}$$

де функція $C(x)$ відіграє роль сталої інтегрування і залежить лише від змінної x.

Підставивши (2.3.28) у співвідношення (2.3.27), маємо:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -2y = -2y - C'(x),$$

звідки отримуємо $C'(x) = 0$, або $C(x) = const$.

Отже, уявна частина функції $f(z)$ записується у вигляді $v(x, y) = 2xy + const$. Остаточно функція $f(z)$ набуває такого вигляду:

$$f(z) = x^2 - y^2 + i2xy + const.$$

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Нехай функція $f(z)$ є диференційовною в точці $z = z_0$. Чи правильно стверджувати, що $f(z)$ є голоморфною функцією в точці $z = z_0$? Наведіть приклади.
2. Сформулюйте умови Коші-Рімана.
3. Для функції $f(z) = \frac{1}{z}$ перевірте виконання умов теореми про необхідні і достатні умови диференційовності функції в точці $z = 1$.
4. Наведіть приклад функції, яка має нуль другого порядку у точці $z = i$.
5. Наведіть приклад функції, яка має нуль другого порядку у точці $z = \infty$.
6. Наведіть приклад функції, яка має нуль другого порядку у точці $z = 1$ та нуль першого порядку у точці $z = \infty$.
7. Функція $f(z)$ має в точці $z = 1$ нуль другого порядку і записується у вигляді $f(z) = (z-1)^2 \psi(z)$. Чи можлива рівність $\psi(1) = 0$?
8. Нехай функції $u(x, y)$, $v(x, y)$ є спряженими гармонічними функціями в $\mathbb{R}^2$. Чи є функція $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ голоморфною в $\mathbb{C}$?

2.3.6. Степеневі ряди з дійсними та комплексними членами. Множина (область) і радіус збіжності степеневого ряду

(Рівномірна збіжність функціонального ряду. Степеневий ряд. Радіус та круг збіжності. Теорема Коші-Адамара)

Нагадаємо деякі означення та властивості функціональних і степеневих рядів. Числовим рядом називається сума $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, де числа $a_k \in \mathbb{C}$ (якщо усі члени ряду — дійсні числа, то ряд є дійсним).

Означення 2.3.13. Послідовність $\left\{S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k : n \geq 1\right\}$ називається послідовністю часткових сум ряду $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Якщо послідовність $\{S_n : n \geq 1\}$ збігається до деякого числа $S \in \mathbb{C}$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ називається збіжним, а число S — сумою ряду. Позначають це так: $S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Якщо не існує скінченної границі послідовності $\{S_n : n \geq 1\}$, то ряд називається розбіжним.

Нехай задано послідовність функцій $\{f_n : \Omega \to \mathbb{C}\}_{n=1}^{\infty}$. Розглянемо функціональний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$. Множина тих значень змінної z, для яких цей ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ є збіжним, називається множиною збіжності ряду.

Означення 2.3.14. Функціональний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ називається рівномірно збіжним на множині $M \subset \Omega$ до функції $f : M \to \mathbb{C}$, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке натуральне число N_0, що для всіх $n > N_0$ і для всіх $z \in M$ виконується нерівність $\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(z) \right| < \varepsilon$.

Для функціональних рядів комплексної змінної, як і для функціональних рядів дійсної змінної, має місце теорема Веєрштрасса про достатні умови рівномірної збіжності функціональних рядів (порівняльна ознака).

Теорема 2.3.8

Нехай для послідовності функцій $\left\{ f_n : \Omega \to \mathbb{C} \right\}_{n=1}^{\infty}$ виконуються умови:

1) для кожного натурального числа n існує таке число $a_n \geq 0$, що виконується нерівність $\sup_{z \in \Omega} | f_n | \leq a_n$ для всіх $z \in \Omega$;

2) числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається.

Тоді функціональний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ рівномірно збіжний на множині Ω.

Означення 2.3.15. Нехай задано послідовність комплексних чисел $\left\{ c_n : n \geq 1 \right\}$, $z_0 \in \mathbb{C}$. Степеневим рядом називається ряд вигляду:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n , \quad z \in \mathbb{C} \tag{2.3.29}$$

Розглянемо верхню границю дійсної послідовності $\left\{ \sqrt[n]{|c_n|} \right\}$ і позначимо її так:

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|} , \quad 0 \le R \le +\infty \tag{2.3.30}$$

Якщо границя (2.3.30) нескінченна, то вважаємо $R = 0$, а якщо вона дорівнює нулеві, то $R = \infty$.

Формула (2.3.30) називається формулою Коші-Адамара.

Надалі для круга радіуса R з центром в точці $z = z_0$ будемо використовувати позначення $B_R(z_0) = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R \right\}$. Має місце наступна теорема про збіжність степеневого ряду.

Теорема 2.3.8. ***Коші-Адамара***

Справедливі такі твердження для степеневого ряду (2.3.29):

1) ряд (2.3.29) є абсолютно збіжним для всіх $z \in B_R(z_0)$;

2) ряд (2.3.29) є розбіжним для всіх $z \notin \overline{B_R}(z_0)$;

3) якою б не була компактна множина K (замкнута і обмежена), що міститься в крузі, ряд (2.3.29) рівномірно збіжний для всіх $z \in K$.

Множина $B_R(z_0) = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R \right\}$ називається кругом збіжності степеневого ряду (2.3.29), а число R, що визначається із співвідношення (2.3.30) — радіусом збіжності степеневого ряду (2.3.29). Для дійсних степеневих рядів кругом збіжності очевидно є інтервал.

Зазначимо, що радіус збіжності степеневого ряду можна, якщо це зручніше, шукати не із співвідношення (2.3.30), а за формулою:

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| \qquad (2.3.31)$$

Зауважимо також, що на питання про збіжність степеневого ряду (2.3.29) на межі круга його збіжності, тобто на колі $|z - z_0| = R$, дана теорема відповіді не дає, а тому це питання вимагає додаткового вивчення. Можна легко побудувати приклади степеневих рядів, які розбігаються в кожній точці такого кола, збігаються в деяких точках кола, але не у всіх його точках, а також приклади рядів, які збігаються в усіх точках такого кола. Для цього достатньо розглянути ряди: $\sum_{n=1}^{\infty} z^n$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^2}$. Усі ці ряди мають радіус збіжності $R = 1$, це випливає з рівності $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$. Очевидно, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z^n$ розбігається на колі $|z| = 1$, бо не виконується необхідна умова збіжності ряду про прямування його загального члена до нуля. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$ збігається при $z = -1$, як знакозмінний ряд, та розбігається при $z = 1$, як гармонічний ряд. Щодо ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^2}$, то всі його члени мажоруються відповідно числами $a_n = \frac{1}{n^2}$, а оскільки ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ є (абсолютно) збіжним, то й степеневий ряд збіжний в кожній точці кола $|z| = 1$.

У випадку дійсних степеневих рядів перевірити збіжність степеневого ряду на межі круга збіжності просто, бо цією межею є всього лише дві точки (кінці інтервалу), якщо ряд не збігається на всій дійсній осі. Тому підставляємо значення кінців інтервалу у ряд і з’ясовуємо збіжність відповідних числових рядів.

Розглянемо приклади використання теореми Коші-Адамара.

Приклад 2.3.7. Знайти круг збіжності степеневого ряду $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n (z-i)^n$.

Розв'язання. Знаходимо радіус збіжності, використовуючи формулу (2.3.30) Коші-Адамара. Маємо:

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|2^n|} = 2 .$$

Отже, радіус збіжності цього степеневого ряду $R = \frac{1}{2}$,

а круг його збіжності $B_{\frac{1}{2}}(i) = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - i| < \frac{1}{2} \right\}$.

Приклад 2.3.8. Знайти область збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x+1)^n}{n3^n}$.

Розв'язання. Це дійсний степеневий ряд. Знайдемо радіус його збіжності за формулою (2.3.31). Маємо:

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)3^{n+1}}{n3^n} = 3.$$

Записуємо інтервал збіжності: (–1–3; –1+3) = (–4; 2). Залишилося перевірити збіжність ряду на кінцях інтервалу.

При $x = 2$ маємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^n}{n \cdot 3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$. Це ряд Лейбніца, він збіжний.

При $x = -4$ маємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (-3)^n}{n \cdot 3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n} \cdot 3^n}{n \cdot 3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Це гармонічний ряд, він розбіжний.

Отже, проміжок (–4; 2] — множина збіжності ряду.

Приклад 2.3.9. Знайти круг збіжності степеневого ряду $\sum_{n=0}^{\infty}\left(2+(-1)^n\right)^n (z-1)^n$.

Розв'язання. Щоб обчислити радіус збіжності, скористаємося теоремою Коші-Адамара. Однак якщо у прикладі 2.3.7 верхня границя збігалася з границею послідовності усіх коефіцієнтів ряду, то у даному випадку потрібно врахувати значення саме верхньої границі, бо послідовність коефіцієнтів границі не має. Отже:

$$\frac{1}{R}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\left|\left(2+(-1)^n\right)^n\right|}=\lim_{2k\to\infty}\sqrt[2k]{3^{2k}}=3.$$

Радіус збіжності даного степеневого ряду $R=\frac{1}{3}$, а його круг збіжності $B_{\frac{1}{3}}(1)=\left\{z\in\mathbb{C}:\left|z-1\right|<\frac{1}{3}\right\}$.

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Відомо, що степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ збігається в точці $x = 2$ і розбігається в точці $x = 4$. Що можна сказати про збіжність ряду в точках 1, 3 та 5?
2. Відомо, що степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-i)^n$ збігається в точці $z = 2i$ і розбігається в точці $z = -i$. Що можна сказати про збіжність ряду в точках $\frac{1}{2}+i$, 2 та $3i$?
3. Сформулюйте означення рівномірно збіжного функціонального ряду. Наведіть приклад рівномірно збіжного функціонального ряду.
4. Сформулюйте ознаку Веєрштрасса рівномірної збіжності функціонального ряду. Продемонструйте ознаку Веєрштрасса на прикладі.
5. Нехай степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ збігається на множині $\{z : |z-a| < R\}$. Наведіть приклад множини, на якій цей ряд збігається рівномірно.

2.3.7. Розклад голоморфної функції в степеневий ряд. Теорема Ліувілля

(Розклад голоморфної функції в степеневий ряд: умови, область збіжності ряду, нерівність Коші для його коефіцієнтів. Теорема Ліувілля. Теорема про єдиність розкладу голоморфної функції в степеневий ряд)

Кожну функцію комплексної змінної $f = f(z)$, яка голоморфна в деякій точці $z = a$, можна записати за допомогою степеневого ряду. Це зображення функції за допомогою степеневого ряду має місце, принаймні, в деякому околі точки $z = a$. Справедлива наступна теорема.

Теорема 2.3.10. ***Про розклад (розвинення) голоморфної функції в степеневий ряд***

Нехай функція $f = f(z)$ голоморфна в області Ω. Тоді для довільної точки $a \in \Omega$ і для будь-якого її околу $B_R(a)$, замикання якого належить області Ω, тобто такого, що $\overline{B_R}(a) \in \Omega$, функція $f(z)$ записується як сума степеневого ряду вигляду $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$, де $z \in B_R(a)$, а коефіцієнти ряду визначаються за допомогою формули:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial^+ B_R(a)} \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}} d\xi.$$

Доведення. Розглянемо довільну точку $a \in \Omega$ і будь-який її окіл $B_R(a)$, для якого $\overline{B_R}(a) \in \Omega$. Оскільки функція $f(z)$ голоморфна в області $\Omega \supset \overline{B_R}(a)$, то згідно з інтегральною формулою Коші для всіх $z \in \Omega$ виконується рівність:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial^+ B_R(a)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \qquad (2.3.32)$$

Скористаємося такою очевидною рівністю:

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi - a + a - z} = \frac{1}{(\xi - a)\left(1 - \dfrac{z-a}{\xi - a}\right)}.$$

Оскільки інтегрування в (2.3.32) здійснюється по колу $|\xi - a| = R$, то для всіх значень $z \in B_R(a)$ виконується нерівність $\left|\dfrac{z-a}{\xi - a}\right| < 1$, а отже, можна скористатися формулою для нескінченної суми геометричної прогресії вигляду $\dfrac{1}{1-q} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$, $|q| < 1$.

Маємо:

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{(\xi - a)\left(1 - \dfrac{z-a}{\xi - a}\right)} = \frac{1}{\xi - a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-a}{\xi - a}\right)^n \qquad (2.3.33)$$

Зважаючи на нерівність:

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-a}{\xi - a}\right)^n \right| \le \sum_{n=0}^{\infty} |q|^n,$$

за теоремою Веєрштрасса отримуємо: ряд зі співвідношення (2.3.33) є рівномірно збіжним стосовно змінної ξ, за якою ведеться інтегрування у формулі (2.3.32). Тому на підставі теореми про інтегрування рівномірно збіжного ряду можна змінити порядок операцій інтегрування і підсумовування, і таким чином отримуємо такі співвідношення:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial^{+}B_R(a)}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial^{+}B_R(a)}\frac{f(\xi)}{\xi-a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{\xi-a}\right)^{n}d\xi=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial^{+}B_R(a)}\frac{(z-a)^n}{(\xi-a)^{n+1}}f(\xi)d\xi=\sum_{n=0}^{\infty}(z-a)^n\left[\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial^{+}B_R(a)}\frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}d\xi\right].$$

Звідси випливає рівність:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n,\ z\in B_R(a),\ \text{ де}$$

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial^{+}B_R(a)}\frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}d\xi\left|c_n\right|\le\frac{M}{R^n}.$$

Теорему доведено.

Наслідок 1. *Нерівність Коші для коефіцієнтів* c_n

Нехай функція $f(z)$, голоморфна в замкнутому крузі $\overline{B_R(a)}$, може бути записана у вигляді степеневого ряду $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n$, $z\in B_R(a)$, та існує таке додатне число M, при якому для довільного $z\in\partial B_R(a)$ має місце нерівність $\left|f(z)\right|\le M$. Тоді для всіх $n\in\mathbb{N}$ виконується нерівність $\left|c_n\right|\le\frac{M}{R^n}$.

Доведення. Оскільки функція $f(z)$ голоморфна в замкнутому крузі $\overline{B_R(a)}$ і записується у вигляді ряду $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n$,

$z \in B_R(a)$, то його коефіцієнти визначаються формулою $c_n = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{\partial^+ B_R(a)} \dfrac{f(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}} d\xi$. Отже, маємо наступні співвідношення:

$$|c_n| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial^+ B_R(a)} \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}} d\xi \right| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} \frac{f(a + Re^{it})}{(Re^{it})^{n+1}} Rie^{it} dt \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{f(a + Re^{it})}{(Re^{it})^{n+1}} Rie^{it} \right| dt \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\left| f(a + Re^{it}) \right|}{\left| Re^{it} \right|^{n+1}} \left| Rie^{it} \right| dt \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{M}{R^{n+1}} R dt = \frac{M}{R^n}.$$

Наслідок доведено.

Із наслідку з теореми 2.3.10 випливає теорема Ліувілля.

Теорема 2.3.11. ***Ліувілля***

Якщо функція $f(z)$ голоморфна і обмежена в усій комплексній площині, то функція $f(z) \equiv const$.

Доведення. Оскільки функція $f(z)$ голоморфна в усій комплексній площині, то вона голоморфна в кожному околі $B_R(0)$ початку координат для довільного $R > 0$, а отже, згідно з теоремою 2.3.10, розкладається в степеневий ряд $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, $z \in B_R(0)$. Тоді за нерівністю Коші для коефіцієнтів степеневого ряду (наслідок із теореми 2.3.10) для всіх $n \in \mathbb{N}$ маємо:

$$|c_n| \le \frac{M}{R^n}, \text{ де } c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial^+ B_R(0)} \frac{f(\xi)}{\xi^{n+1}} d\xi .$$

Звідси, зважаючи на те, що $R > 0$ — довільне число, а інтеграли по гомотопних кривих, за теоремою Коші про рівність інтегралів по гомотопних кривих, є рівними між собою, отримуємо, що при $R \to \infty$ всі, крім нульового, коефіцієнти степеневого ряду для функції $f(z)$, яка задовольняє умови теореми Ліувілля, дорівнюють нулеві, а отже, $f(z) \equiv c_0$, де c_0 — деяка стала.

Теорему доведено.

Степеневий ряд має ряд властивостей, аналогічних до властивостей многочленів. Зокрема, сума степеневого ряду у його крузі збіжності є голоморфною функцією, причому, якщо $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n = f(z)$, $z \in B_R(a)$, то для його похідної має місце формула $f'(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n n (z-a)^n$, $z \in B_R(a)$, тобто степеневий ряд можна почленно диференціювати. Звідси випливає, що якщо функція $f(z)$ голоморфна в області Ω, то функція $f'(z)$ також є голоморфною в цій області.

Теорема 2.3.12. ***Єдиність розкладу в степеневий ряд***

Степеневий ряд є рядом Тейлора своєї суми, тобто якщо $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$, $z \in B_R(a)$, то $c_n = \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$.

Доведення. Нехай $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$, $z \in B_R(a)$. Звідси знаходимо $f(a) = c_0$. Розглянемо похідну $f'(z) = \left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \right)' =$

$= \sum_{n=1}^{\infty} nc_n (z-a)^{n-1}$. Обчислюючи її значення в точці $z = a$, знаходимо $f'(a) = 1 \cdot c_1$, звідки випливає рівність $c_1 = f'(a)$. Аналогічно знаходимо значення другої похідної і значення коефіцієнта c_2: $f''(z) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \right)'' =$

$= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n (z-a)^{n-2}$. Отже, $f''(a) = 2c_2$, або $c_2 = \dfrac{f''(a)}{2 \cdot 1}$.

Аналогічно отримуємо $c_3 = \dfrac{f'''(a)}{3 \cdot 2}, \ldots, c_n = \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$.

Теорему доведено.

Приклад 2.3.10. Розкласти в степеневі ряди в околі точки $z = 0$ такі функції:

а) $f(z) = \dfrac{1}{z+1}$; б) $f(z) = \dfrac{1}{(z+1)^2}$; в) $f(z) = \dfrac{z}{(z+2)^3}$;

г) $f(z) = \dfrac{1}{z^2 - 3z + 2}$ та визначити області збіжності рядів.

Розв'язання

1. Скориставшись формулою для суми геометричної прогресії $\dfrac{1}{1-q} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n$, $|q| < 1$, маємо:

$$f(z) = \frac{1}{z+1} = \frac{1}{1-(-z)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-z)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n .$$

Областю збіжності отриманого ряду є круг $B_R(0)$, де $\dfrac{1}{R} = \overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{|(-1)^n|} = 1$.

2. Розглянемо тепер функцію $f(z)=\dfrac{1}{(z+1)^2}$. Перш за все зауважимо, що $\left(\dfrac{1}{z+1}\right)'=-\dfrac{1}{(z+1)^2}$, а отже, враховуючи рівномірну збіжність в крузі $B_1(0)$ ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n$, отримаємо рівність:

$$f(z)=\frac{1}{(z+1)^2}=-\left(\frac{1}{z+1}\right)'=-\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}nz^{n-1},$$

де ряд у правій частині останньої рівності збігається в тому ж самому крузі, тобто, в області $B_1(0)$. Таким чином, розклад в степеневий ряд отримано.

3. Функція $f(z)=\dfrac{z}{(z+2)^3}$ може бути записана у вигляді добутку $f(z)=zg(z)$, де $g(z)=\dfrac{1}{(z+2)^3}$. Аналогічно до попереднього прикладу знаходимо її розклад в ряд. Маємо:

$$\frac{1}{z+2}=\frac{1}{2-(-z)}=\frac{\frac{1}{2}}{1-\left(\frac{-z}{2}\right)}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-z}{2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}z^n,$$

при чому ряд в правій частині збігається в крузі $B_R(0)$, де

$$\frac{1}{R}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\right|}=\frac{1}{2}.$$

Тоді:

$$g(z)=\frac{1}{\left(z+2\right)^3}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z+2}\right)''=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}z^n\right)''=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+2}}n(n-1)z^{n-2},$$

а отже:

$$f(z)=\frac{z}{\left(z+2\right)^3}=z\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+2}}n(n-1)z^{n-2}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+2}}n(n-1)z^{n-1},$$

де ряд збігається в області $B_2(0)$.

4. Функцію $f(z)=\dfrac{1}{z^2-3z+2}$ можна записати у вигляді суми:

$$f(z)=\frac{1}{z^2-3z+2}=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}.$$

Використовуючи ідею про розклад дробу в степеневий ряд, отримуємо:

$$f(z)=\frac{1}{z^2-3z+2}=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}=-\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{z}{2}}+\frac{1}{1-z}=$$

$$=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n+\sum_{n=0}^{\infty}z^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)z^n,$$

де ряд збігається в крузі $B_R(0)$, де $\dfrac{1}{R}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\left|1-\dfrac{1}{2^{n+1}}\right|}=1$.

Приклад 2.3.11. Розкласти в степеневий ряд функцію $f(z)=(z-1)e^{z-1}$ в околі точок $z_0=1$, $z_0=0$.

Розв'язання. При розкладі функцій в степеневий ряд можна також використовувати запис (зображення) функцій за допомогою рядів Тейлора.

Розглянемо спочатку точку $z_0 = 1$. Зауважимо, що, по-перше, функція $f(z) = (z-1)e^{z-1}$ голоморфна в усій комплексній площині; по-друге, в околі точки $z_0 = 1$ розклад функції в степеневий ряд здійснюється за степенями $(z-1)$. Тоді, враховуючи теорему про єдиність розкладу голоморфної функції в степеневий ряд, маємо:

$$f(z) = (z-1)e^{z-1} = (z-1)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^{n+1}}{n!},$$

де ряд збігається в усій комплексній площині, оскільки $\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\left|\frac{1}{n!}\right|} = 0$.

Аналогічно, для розкладу даної функції в околі точки $z_0 = 0$, знаходимо:

$$f(z) = (z-1)e^{z-1} = e^{-1}ze^{z} - e^{-1}e^{z} = \frac{1}{e}z\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!} - \frac{1}{e}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!} =$$

$$= \frac{1}{e}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z^{n+1}}{n!} - \frac{z^n}{n!}\right),$$

де ряд очевидно теж збігається в усій комплексній площині.

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Які твердження використовуються при доведенні теореми про розвинення голоморфної функції в степеневий ряд?
2. Сформулюйте теорему Ліувілля.
3. Чи виконуються умови теореми Ліувілля для функції $f(z) = \sin z$?
4. Наведіть приклад функції $f(z)$, яка є голоморфною і обмеженою в $\mathbb{C}$.
5. Нехай функція $f(z)$ є голоморфною в області D. Чи існує для функції $f(z)$ похідна другого порядку в області D?

2.3.8. Ряд Лорана

(Ряд Лорана голоморфної в кільці функції. Головна та правильна частина ряду Лорана, область його збіжності. Класифікація особливих точок голоморфної в кільці функції. Теореми про вигляд ряду Лорана в проколотому околі скінченної особливої точки для випадку усувної особливої точки, полюса та істотно особливої точки. Ряд Лорана в околі нескінченно віддаленої точки)

Якщо ряди Тейлора дають зображення *голоморфних* функцій в крузі, то ряди вигляду:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n , \tag{2.3.34}$$

тобто ряди, які містять як додатні, так і від'ємні степені двочлена $(z-a)$, дають зображення *голоморфних* функцій у кільці:

$$K = \left\{ z \in \mathbb{C} : r < \left| z-a \right| < R \right\} ,\ 0 \le r < R \le +\infty \tag{2.3.35}$$

У випадку, коли $r = 0$, ряди вигляду (2.3.34) дозволяють дослідити властивості функції в околі точки $z = a$, у якій дана функція не є голоморфною. Такі точки називаються особливими точками функції $f(z)$.

Означення 2.3.16. Ряд вигляду (2.3.34), де

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\{|z-a|=\rho\}^+} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}} d\xi,\ n \in \mathbb{Z},\ r < \rho < R , \tag{2.3.36}$$

називається рядом Лорана функції $f(z)$ в кільці (2.3.35).

Тут інтегрування здійснюється по додатно орієнтованому контуру $\left\{ |z-a| = \rho \right\}^+$. При цьому ряд $\sum\limits_{n=-\infty}^{-1} c_n (z-a)^n$ називається *головною частиною ряду Лорана*, а ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ — *правильною частиною ряду Лорана*.

Очевидно, що ряд (2.3.34) збігається в точці $z \in \mathbb{C}$ тоді, і тільки тоді, коли збігаються його правильна і головна частини. Правильна частина ряду Лорана — ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ збігається у крузі $B_R(a)$, де $\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}$, бо це степеневий ряд.

Розглянемо головну частину ряду Лорана: ряд $\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z-a)^n = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} (z-a)^{-n}$.

Виконавши заміну $\xi = (z-a)^{-1}$, головну частину ряду Лорана можна записати у вигляді ряду $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} \xi^n$, який збігається в крузі $|\xi| < r_0$, де $\frac{1}{r_0} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_{-n}|}$. Зважаючи, що $\xi = (z-a)^{-1}$, цей ряд збігається в області $\left\{ z : |z-a| > \frac{1}{r_0} = r \right\}$. Отже, областю збіжності ряду Лорана (2.3.34) є кільце:

$$K(a) = \left\{ z : r < |z-a| < R \right\}, \tag{2.3.37}$$

де $\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}$, $r = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_{-n}|}$.

Якщо $r > R$, то ряд Лорана (2.3.34) розбіжний, якщо ж $r < R$, то він збігається в кільці (2.3.37).

Для ряду Лорана, аналогічно рядові Тейлора, має місце теорема Коші-Адамара.

Теорема 2.3.13. ***Коші-Адамара для ряду Лорана***

Ряд (2.3.34):

1) є абсолютно збіжним для всіх $z \in K(a)$;

2) є розбіжним для всіх $z \notin \overline{K}(a)$;

3) якою б не була компактна (замкнута і обмежена) множина $B \subset K(a)$, ряд рівномірно збіжний для всіх $z \in B$.

Для функції комплексної змінної має місце теорема про розвинення диференційовної функції в ряд Лорана.

Теорема 2.3.14. ***Теорема Лорана***

Нехай функція $f = f(z)$ є голоморфною в кільці $K(a) = \{z : 0 \le r < |z-a| < R\}$. Тоді функцію $f(z)$ можна записати у вигляді ряду $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$, де $z \in K(a)$,

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\{|z-a|=r_1\}^+} \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}} d\xi,\ \rho \in (r;R).$$

Доведення. Розглянемо довільне кільце $K_1(a) = \{z : 0 \le r_1 < |z-a| < R_1\}$, де $r_1 > r$, $R_1 < R$. Оскільки $K_1(a) \subset K(a)$, то функція $f(z)$ є голоморфною в замиканні області $\overline{K}_1(a)$. Згідно з інтегральною формулою Коші маємо:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial^+ K_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\{|z-a|=R_1\}^+} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\{|z-a|=r_1\}^-} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\{|z-a|=R_1\}^+} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\{|z-a|=r_1\}^+} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi.$$

Розглянемо кожен із цих інтегралів. Маємо:

$$I_1 = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\{|z-a|=R_1\}^+} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi; \quad I_2 = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\{|z-a|=r_1\}^+} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi .$$

Оскільки для дробу в підінтегральній функції можна записати таку тотожність: $\dfrac{1}{\xi - z} = \dfrac{1}{\xi - a + a - z} = \dfrac{1}{(\xi - a)\left(1 - \dfrac{z-a}{\xi - a}\right)}$,

бо інтегрування в I_1 здійснюється по колу $|\xi - a| = R_1$, де $\left|\dfrac{z-a}{\xi - a}\right| < 1$, то, скориставшись формулою для суми нескінченної геометричної прогресії вигляду $\dfrac{1}{1-q} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$, $|q| < 1$, отримаємо:

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{(\xi - a)\left(1 - \dfrac{z-a}{\xi - a}\right)} = \frac{1}{\xi - a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-a}{\xi - a}\right)^n \qquad (2.3.38)$$

Зважаючи на нерівність $\left|\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\dfrac{z-a}{\xi - a}\right)^n\right| \le \sum\limits_{n=0}^{\infty} |q|^n$ і використовуючи теорему Веєрштрасса, приходимо до висновку, що ряд (2.3.38) є рівномірно збіжним при $|\xi - a| = R_1$, а отже, має місце співвідношення:

$$I_1 = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\{|z-a|=R_1\}^+} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\{|z-a|=R_1\}^+} \frac{f(\xi)}{\xi - a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-a}{\xi - a}\right)^n d\xi =$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\{|z-a|=R_1\}^+}\frac{(z-a)^n}{(\xi-a)^{n+1}}f(\xi)d\xi=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(z-a)^n\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\{|z-a|=R_1\}^+}\frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}d\xi\right].$$

Розглянемо тепер другий інтеграл $I_2=\frac{1}{2\pi i}\int_{\{|z-a|=r_1\}^+}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi$.

Оскільки

$$\frac{1}{\xi-z}=\frac{1}{\xi-a+a-z}=\frac{-1}{z-a-(\xi-a)}=-\frac{1}{z-a}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{\xi-a}{z-a}\right)},$$

а інтегрування в I_2 здійснюється по колу $|\xi-a|=r_1$, де виконується нерівність $\left|\frac{\xi-a}{z-a}\right|<1$, то, скориставшись формулою для суми нескінченної геометричної прогресії вигляду $\frac{1}{1-q}=\sum_{n=0}^{\infty}q^n$, $|q|<1$, отримуємо:

$$\frac{1}{\xi-z}=\frac{-1}{(z-a)\left(1-\frac{\xi-a}{z-a}\right)}=-\frac{1}{z-a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\xi-a}{z-a}\right)^n \qquad (2.3.39)$$

Враховуючи нерівність $\left|\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{\xi-a}\right)^n\right|\le\sum_{n=0}^{\infty}|q|^n$ і використовуючи теорему Веєрштрасса, приходимо до висновку, що ряд (2.3.39) є рівномірно збіжним, а отже, має місце співвідношення:

$$I_2 = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\{|z-a|=r_1\}^+}\frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\{|z-a|=r_1\}^+}\frac{f(\xi)}{z-a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\xi - a}{z-a}\right)^n d\xi =$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\{|z-a|=r_1\}^+}\frac{(\xi-a)^n}{(z-a)^{n+1}}f(\xi)d\xi =$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty}(z-a)^{-(n+1)}\left[\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\{|z-a|=r_1\}^+}\frac{f(\xi)}{(\xi-a)^n}d\xi\right] =$$

$$= -\sum_{n=-\infty}^{-1}(z-a)^n\left[\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\{|z-a|=r_1\}^+}\frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}d\xi\right].$$

Таким чином, відповідно до узагальненої теореми Коші про рівність інтегралів по гомотопних кривих, маємо:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial^+ K_1}\frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi = \sum_{n=0}^{\infty}(z-a)^n\left[\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\{|z-a|=R_1\}^+}\frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}d\xi\right] +$$

$$+\sum_{n=-\infty}^{-1}(z-a)^n\left[\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\{|z-a|=r_1\}^+}\frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}d\xi\right] =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty}(z-a)^n\left[\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\{|z-a|=\rho\}^+}\frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}d\xi\right] =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-a)^n,\ \rho\in(r;R),$$

де $c_n = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\{|z-a|=\rho\}^+}\frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}d\xi$.

Теорему доведено.

Наслідок. Нехай функція $f(z)$ голоморфна в кільці $K(a)=\{z:\rho<|z-a|<R\}$ та $M_\rho=\max\limits_{z\in\gamma_\rho}|f(z)|$, $\gamma_\rho=a+\rho e^{it}$, $t\in[0;2\pi]$, $\rho\in(r;R)$. Тоді для довільного $n\in\mathbb{Z}$ має місце нерівність $|c_n|\le\dfrac{M}{\rho^n}$.

Доведення. Оскільки функція $f(z)$ голоморфна в кільці $K(a)=\{z:\rho<|z-a|<R\}$, то, за теоремою Лорана, ця функція записується у вигляді ряду $f(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-a)^n$, $z\in K(a)$, де $c_n=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int\limits_{\{|z-a|=\rho\}^+}\dfrac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}d\xi$. Отже, маємо:

$$|c_n|=\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\{|z-a|=\rho\}^+}\frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}d\xi\right|=\frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi}\frac{f(a+\rho e^{it})}{(\rho e^{it})^{n+1}}\rho ie^{it}dt\right|\le$$

$$\le\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{f(a+\rho e^{it})}{(\rho e^{it})^{n+1}}\rho ie^{it}\right|dt\le$$

$$\le\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{|f(a+\rho e^{it})|}{|\rho e^{it}|^{n+1}}|\rho ie^{it}|dt\le\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{M_\rho}{\rho^{n+1}}\rho dt=\frac{M_\rho}{\rho^n}.$$

Наслідок доведено.

Вигляд ряду Лорана в околі особливих точок залежить від типу особливих точок. Спочатку розглянемо класифікацію ізольованих особливих точок.

Нехай точка $a \in \overline{\mathbb{C}}$. Проколотим R-околом точки a називається множина $\overset{\circ}{B}_R(a) = \{z : 0 < |z - a| < R\}$, якщо точка $a \in \mathbb{C}$ і множина $\overset{\circ}{B}_R(a) = \{z : R < |z| < \infty\}$, якщо $a = \infty$.

Означення 2.3.17. Якщо функція *f(z)* голоморфна в деякому проколотому околі $\overset{\circ}{B}_R(a)$, але не голоморфна в жодному околі цієї точки, то точка $z = a$ називається ізольованою особливою точкою функції *f(z)*.

Означення 2.3.18. Нехай точка $z = a$ — ізольована особлива точка функції $f(z)$. Якщо існує границя $\lim\limits_{z \to a} f(z)$ і ця границя є скінченною, то точка $z = a$ називається усувною особливою точкою.

Означення 2.3.19. Нехай точка $z = a$ — ізольована особлива точка функції $f(z)$. Якщо існує границя $\lim\limits_{z \to a} f(z)$ і ця границя є нескінченною, то точка $z = a$ називається полюсом.

Означення 2.3.20. Нехай точка $z = a$ — ізольована особлива точка функції $f(z)$. Якщо границя $\lim\limits_{z \to a} f(z)$ не існує, то точка $z = a$ називається суттєво (або істотно) особливою точкою.

Розглянемо кілька прикладів.

Приклад 2.3.12. Розглянемо функцію $f(z) = \dfrac{\sin z}{z}$. Ця функція голоморфна в усій комплексній площині, крім точки $z = 0$. Отже, точка $z = 0$ є ізольованою особливою точкою для даної функції. Знайдемо границю $\lim\limits_{z \to 0} f(z)$. Маємо:

$$\lim_{z \to 0} f(z) = \lim_{z \to 0} \frac{\sin z}{z} = 1.$$

Отже, точка $z = 0$ — усувна особлива точка функції $f(z) = \frac{\sin z}{z}$.

Приклад 2.3.13. Розглянемо функцію $f(z) = \frac{z}{z+1}$. Ця функція голоморфна в усій замкненій комплексній площині, крім точок $z = -1$, $z = \infty$. Очевидно, що ці точки є ізольованими особливими точками для даної функції. Визначимо їх тип. Для цього знайдемо границю $\lim\limits_{z \to -1} f(z)$. Маємо:

$$\lim_{z \to -1} f(z) = \lim_{z \to -1} \frac{z}{z+1} = \infty.$$

Отже, точка $z = -1$ — особлива точка типу полюс функції $f(z) = \frac{z}{z+1}$.

Розглянемо тепер точку $z = \infty$, яка теж є ізольованою особливою точкою для даної функції. Знайдемо границю $\lim\limits_{z \to \infty} f(z)$. Маємо:

$$\lim_{z \to \infty} f(z) = \lim_{z \to \infty} \frac{z}{z+1} = 1.$$

Отже, точка $z = \infty$ — усувна особлива точка функції $f(z) = \frac{z}{z+1}$.

Приклад 2.3.14. Розглянемо функцію $f(z) = e^z$. Ця функція є голоморфною в усій комплексній площині, а в точці $z = \infty$, як усі функції комплексної змінної, має особливість, бо її значення не можна визначити в цій точці. Отже, точка $z = \infty$ є ізольованою особливою точкою функції $f(z) = e^z$. Визначимо тип цієї особливої точки. Для цього розглянемо границю $\lim\limits_{z \to \infty} f(z)$. Очевидно, що границя $\lim\limits_{z \to \infty} e^z$ не існує. У цьому легко переконатись, розглянувши, наприклад, два шляхи прямування змінної z до нескінченно віддаленої точки $z = \infty$, а саме: $z = \infty$ $z = x$, $x \in \mathbb{R}$, $x \to +\infty$, та $z = iy$, $y \in \mathbb{R}$, $y \to +\infty$. Дійсно, маємо:

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = \infty, \quad \lim_{y\to+\infty} e^{iy} = \lim_{y\to+\infty} (\cos y + i \sin y) \neq +\infty.$$

Отже, точка $z = \infty$ є суттєво особливою точкою функції $f(z) = e^z$.

З'ясуємо тепер вигляд ряду Лорана в околі ізольованої особливої точки, який, як зазначено вище, суттєво залежить від типу особливої точки.

Мають місце такі властивості.

Теорема 2.3.15. ***Вигляд ряду Лорана в околі усувної особливої точки***

Ізольована особлива точка $z = a \in \mathbb{C}$ функції $f(z)$ є усувною особливою точкою функції $f(z)$ тоді і тільки тоді, коли існує число $R > 0$, таке, що для довільного $z \in \overset{\circ}{B}_R(a)$ функція $f(z)$ може бути записана у вигляді ряду Лорана $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$.

Примітка. Згідно з цією теоремою ряд Лорана в околі скінченної особливої точки має лише правильну частину.

Доведення. Доведемо спочатку необхідну умову теореми, тобто покажемо, що якщо ізольована особлива точка $z = a$ функції $f(z)$ є усувною особливою точкою функції $f(z)$, то існує таке число $R > 0$, що для всіх $z \in \overset{\circ}{B}_R(a)$ функцію $f(z)$ можна записати за допомогою ряду Лорана вигляду $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n$. Оскільки точка $z=a$ для функції $f(z)$ є ізольованою особливою точкою, то ця функція голоморфна в деякому проколотому околі точки $z=a$, наприклад, в околі $\overset{\circ}{B}_R(a)$, а отже, за теоремою Лорана, має місце зображення $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-a)^n$, $z\in\overset{\circ}{B}_R(a)$. Крім того, оскільки $z=a$ є усувною особливою точкою функції $f(z)$, тобто існує границя $\lim\limits_{z\to a}f(z)$ і ця границя є скінченною, то існує таке додатне число M, що для всіх $z\in\overset{\circ}{B}_R(a)$ виконується нерівність $|f(z)|\le M$.

Тут ми скористалися відомою теоремою з математичного аналізу про те, що якщо функція має скінченну границю, то ця функція є обмеженою в деякому околі точки, до якої прямує незалежна змінна.

Скористаємось ще наслідком з теореми Лорана, згідно з яким для коефіцієнтів ряду Лорана виконуються нерівності $|c_n|\le M\rho^{-n}$, $\rho\in(0;R)$. Звідси для всіх $n<0$ випливає, що при $\rho\to 0$ виконується рівність $c_n=0$, $n<0$. Отже, функція *f(z)* може бути записана за допомогою ряду Лорана вигляду $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n$, $z\in\overset{\circ}{B}_R(a)$.

Доведемо тепер достатність: якщо ряд Лорана для функції $f(z)$ містить лише правильну частину, тобто має вигляд $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n$, $z\in\overset{\circ}{B}_R(a)$, то точка $z=a$ є усувною особливою точкою функції $f(z)$.

Дійсно, із запису ряду Лорана $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n$ випливає існування границі $\lim_{z\to a}f(z)=c_0$, бо сума ряду є голоморфною функцією в деякому околі точки $z = a$. Це означає, що точка $z = a$ є усувною особливою точкою для функції $f(z)$.

Теорему доведено.

Доведену теорему можна сформулювати ще так: точка $z = a$ є усувною особливою точкою функції $f(z)$ тоді і тільки тоді, коли функція $f(z)$ є обмеженою в деякому околі точки $z = a$.

Зауважимо, що при такому формулюванні теореми точка $z = a$ може бути вже і нескінченною, але тоді ряд Лорана матиме дещо інший вигляд.

Правильність даного твердження випливає зі змісту викладеного вище доведення.

Теорема 2.3.16. ***Вигляд ряду Лорана в околі полюса***

Ізольована особлива точка $z=a\in\mathbb{C}$ функції $f(z)$ є особливою точкою типу полюс функції $f(z)$ тоді і тільки тоді, коли існує число $R>0$ та єдине натуральне число N, такі, що для всіх $z\in\overset{\circ}{B}_R(a)$ функцію $f(z)$ можна записати за допомогою ряду Лорана вигляду $f(z)=\sum_{n=-N}^{\infty}c_n(z-a)^n$.

Доведення. Покажемо спочатку, що якщо ізольована особлива точка $z=a\in\mathbb{C}$ функції $f(z)$ є особливою точкою типу полюс функції $f(z)$, то функція $f(z)$ може бути записана у вигляді ряду Лорана $f(z)=\sum_{n=-N}^{\infty}c_n(z-a)^n$, тобто головна частина ряду Лорана містить лише скінченну кількість ненульових доданків. Дійсно, оскільки точка $z = a$ — полюс функції $f(z)$, то маємо рівність $\lim\limits_{z\to a} f(z) = \infty$. Розглянемо допоміжну функцію $\varphi(z) = \dfrac{1}{f(z)}$. Очевидно, що функція $\varphi(z)$ є голоморфною в проколотому околі $\overset{\circ}{B}_R(a)$ і виконується рівність $\lim\limits_{z\to a}\varphi(z) = 0$. Довизначивши функцію $\varphi(z)$ в точці $z = a$ нулем, тобто таким чином, щоб виконувалася рівність $\varphi(a) := 0$, отримаємо, що тотожно не рівна нулеві функція $\varphi(z)$ є голоморфною в околі $B_R(a)$ і має нуль в точці $z = a$. Скористаємось теоремою про вигляд голоморфної функції в околі нуля. Тоді отримаємо, що існує таке натуральне число N та голоморфна в деякому околі точки $z = a$ функція $\psi(z)$, яка не набуває в цьому околі нульових значень, що виконується рівність $\varphi(z) = (z-a)^N \psi(z)$.

Оскільки функція $\psi(z)$ голоморфна в околі точки $z = a$ і не набуває нульових значень в деякому околі точки $z = a$, то функцію $\dfrac{1}{\psi(z)}$ можна записати за допомогою степеневого ряду у вигляді: $\dfrac{1}{\psi(z)} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$. Звідси отримуємо наступну рівність:

$$f(z) = \frac{1}{\varphi(z)} = \frac{1}{(z-a)^N \psi(z)} = (z-a)^{-N} \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n, \quad z \in \overset{\circ}{B}_R(a).$$

Покажемо тепер виконання достатньої умови, тобто доведемо, що якщо функція $f(z)$ може бути записана за допомогою ряду Лорана вигляду $f(z) = \sum\limits_{n=-N}^{\infty} c_n (z-a)^n$, $z \in \overset{\circ}{B}_R(a)$, то точка $z = a$ — полюс функції $f(z)$.

Розглянемо допоміжну функцію $\varphi(z) = (z-a)^N f(z)$. Очевидно, що точка $z = a$ є усувною особливою точкою для функції $\varphi(z)$, тобто існує скінченна границя $\lim\limits_{z\to a}\varphi(z) = c_0 \neq 0$.

Тоді маємо $\lim\limits_{z\to a} f(z) = \lim\limits_{z\to a}\dfrac{\varphi(z)}{(z-a)^N} = \infty$, тобто точка $z = a$ — полюс функції $f(z)$.

Теорему доведено.

Означення 2.3.21. Точка $z = a$ є полюсом порядку N функції $f(z)$, якщо точка $z = a$ є нулем порядку N функції $\varphi(z) = \dfrac{1}{f(z)}$.

Теорема 2.3.17. *Вигляд ряду Лорана в околі суттєво особливої точки*

Ізольована особлива точка $z = a \in \mathbb{C}$ функції *f(z)* є суттєвою особливою точкою функції *f(z)* тоді і тільки тоді, коли головна частина ряду Лорана функції *f(z)* в околі цієї точки містить нескінченну кількість доданків.

Доведення теореми випливає із теорем 2.3.18 та 2.3.19, бо у випадку нульової головної частини ряду Лорана точка $z = a \in \mathbb{C}$ є усувною особливою точкою, а у випадку скінченної кількості ненульових доданків головної частини ряду Лорана точка $z = a \in \mathbb{C}$ є полюсом для заданої функції.

Поведінку функції в околі суттєво особливої точки характеризує теорема Сохоцького.

Теорема 2.3.22. *Сохоцького*

Нехай точка $z = a$ є суттєвою особливою точкою функції $f(z)$. Тоді для довільного числа $B \in \overline{\mathbb{C}}$ існує така послідовність точок $\{z_n : n \geq 1\} \subset \mathbb{C}$, для яких виконуються умови $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$ та $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = B$.

Розглянемо ряд Лорана в околі нескінченно віддаленої точки $z = \infty$.

Нагадаємо, що вивчення властивостей функцій $f(z)$ в (проколотому) околі нескінченно віддаленої точки $z = \infty$ проводиться шляхом розгляду властивостей функцій $g(\xi) = f\left(\dfrac{1}{\xi}\right)$ у відповідному (проколотому) околі точки $\xi = 0$.

Розглянемо функцію $f(z)$ комплексної змінної $z \in \mathbb{C}$, голоморфну на деякій множині $\{z \in C : R < |z| < +\infty\}$, яка називається проколотим околом нескінченно віддаленої точки $z = \infty$. Нескінченно віддалена точка $z = \infty$ завжди є особливою точкою для функції $f(z)$, бо дана функція не визначена в точці $z = \infty$. У певних випадках цю функцію можна довизначити в точці $z = \infty$ за неперервністю. Дійсно, якщо існує скінченна границя $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)$, яку позначимо c_0, то, поклавши $f(\infty) = c_0$, отримаємо функцію, визначену і неперервну в нескінченно віддаленій точці $z = \infty$. Тоді функція $g(\xi) = f\left(\dfrac{1}{\xi}\right)$ буде визначена в деякому околі початку координат, тобто околі точки $z = 0$, і буде в ньому голоморфною, як функція, що голоморфна в деякому проколотому околі точки $z = 0$ і неперервна в ній. Нагадаємо, що функція $f(z)$ називається голоморфною в нескінченно віддаленій точці $z = \infty$, якщо функція $g(\xi) = f\left(\dfrac{1}{\xi}\right)$ є голоморфною в точці $\xi = 0$.

Враховуючи очевидну рівність $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = \lim\limits_{z\to 0} f\left(\dfrac{1}{z}\right)$, яка має місце за припущення, що така границя існує, приходимо до висновку, що тип особливої точки в нескінченно віддаленій точці можна визначити аналогічно випадку скінченної особливої точки. Отже, точка $z=\infty$ називається усувною ізольованою точкою функції *f(z)*, якщо функція *f(z)* голоморфна в деякому проколотому околі точки $z=\infty$ й існує скінченна границя $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)$.

Точка $z=\infty$ називається полюсом функції *f(z)*, якщо функція *f(z)* голоморфна в деякому проколотому околі точки $z=\infty$ й існує границя $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)$, причому $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = \infty$.

Зауважимо, що порядок полюса функції *f(z)* в точці $z=\infty$ визначається як порядок полюса функції $g(\xi) = f\left(\dfrac{1}{\xi}\right)$ в точці $\xi = 0$.

Точка $z=\infty$ називається суттєво особливою точкою функції *f(z)*, якщо функція *f(z)* голоморфна в деякому проколотому околі точки $z=\infty$ і не існує границя $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)$.

Зауважимо, що нескінченно віддалена точка може бути граничною точкою полюсів. Наприклад, для функцій $f(z) = tg\, z$ та $g(z) = ctg\, z$ точка $z=\infty$ є граничною точкою полюсів.

Якщо функція *f(z)* в деякому (проколотому) околі нескінченно віддаленої точки $z=\infty$ розкладається в ряд Лорана, то такий розклад проводиться за степенями незалежної змінної *z*, тобто ряд Лорана функції в околі нескінченно віддаленої функції має вигляд $\varphi(\xi) = f\left(\dfrac{1}{\xi}\right)$. Водночас ряд $\sum\limits_{n=-\infty}^{0} c_n z^n$ називається правильною частиною ряду Лорана, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} c_n z^n$ — головною частиною ряду Лорана.

Розглянемо функцію $\varphi(\xi)=f\left(\frac{1}{\xi}\right)$, яка вважається голоморфною в проколотому околі $\overset{\circ}{B}_{R_1}(0)=\left\{\xi:|\xi|<\frac{1}{R}\right\}$. Тоді, якщо точка $z=\infty$ — усувна особлива точка функції $F(z)$, то точка $\xi=0$ також усувна особлива точка функції $\varphi(\xi)=f\left(\frac{1}{\xi}\right)$, а отже, її ряд Лорана має вигляд:

$$\varphi(\xi)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\xi^n .$$

Звідси отримуємо, що ряд Лорана функції $f(z)$ в околі нескінченно віддаленої точки має вигляд:

$$f(z)=\varphi\left(\frac{1}{z}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\left(\frac{1}{z}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{z^n}.$$

Бачимо, що головна частина ряду Лорана дорівнює нулеві.

Якщо точка $z=\infty$ — полюс порядку N функції $f(z)$, тобто точка $\xi=0$ є полюсом порядку N функції $\varphi(\xi)=f\left(\frac{1}{\xi}\right)$, то її ряд Лорана в околі $\xi=0$ має вигляд:

$$\varphi(\xi)=\sum_{n=-N}^{\infty}c_n\xi^n ,$$

а отже, ряд Лорана функції $f(z)$ в околі нескінченно віддаленої точки має вигляд:

$$f(z)=\varphi\left(\frac{1}{z}\right)=\sum_{n=-N}^{\infty}c_n\left(\frac{1}{z}\right)^n=$$

$$=c_{-N}z^N+c_{-N+1}z^{N-1}+\ldots+c_{-1}z^1+c_0+c_1z^{-1}+c_2z^{-2}+\ldots$$

Звідси видно, що головна частина ряду Лорана не дорівнює нулеві й містить лише скінченну кількість ненульових доданків.

Очевидно, що у випадку, коли точка $z=\infty$ є суттєво особливою точкою, то ряд Лорана в деякому її околі буде мати головну частину, яка містить безліч ненульових доданків.

Приклад 2.3.15. Розкласти функцію $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z+2)}$ в ряд Лорана в околі точки $z_0 = 0$ та в кільці $K = \{z:1 < |z| < 2\}$.

Розв'язання. Подамо функцію $f(z)$ у вигляді суми дробів:

$$f(z)=\frac{1}{(z-1)(z+2)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z+2}\right).$$

Знайдемо розклад в ряд Лорана функції $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z+2)}$ спочатку в околі точки $z_0 = 0$. З вигляду ряду Лорана випливає, що розклад в околі даної точки має здійснюватися за степенями z. Скористаємось формулою для суми нескінченної геометричної прогресії вигляду $\dfrac{1}{1-q}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}q^n$, $|q| < 1$. Маємо:

$$f(z)=\frac{1}{(z-1)(z+2)}=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-z}-\frac{1}{3}\cdot\frac{\frac{1}{2}}{1-\left(-\frac{z}{2}\right)}=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}z^n-\frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z}{2}\right)^n=$$

$$=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}z^n-\frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}z^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left[-\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\frac{(-1)^n}{2^n}\right]z^n=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left[1+\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\right]z^n,$$

тобто отримано ряд Лорана, який містить лише правильну частину.

Оскільки в точці $z_0=0$ функція $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z+2)}$ є голоморфною, то ряд Лорана є рядом Тейлора. Область його збіжності — круг $B_R(0)$, радіус якого визначається за допомогою формули Коші-Адамара:

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\left|1 + \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\right|} = \lim_{2k\to\infty} \sqrt[2k]{\left|1 + \frac{1}{2^{2k+1}}\right|} = 1.$$

Отже, отриманий ряд збігається в області $\Omega_1 = \{z: |z| < 1\}$.

Знайдемо розклад функції у кільці $\Omega = \{z: 1 < |z| < 2\}$. З теореми Лорана випливає, що розклад у вказаному кільці має здійснюватися за степенями z. Скористаємося формулою для суми нескінченної геометричної прогресії вигляду

$$\frac{1}{1-q} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n, \ |q| < 1.$$

Маємо:

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z+2)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\frac{1}{z}}{1 - \frac{1}{z}} - \frac{1}{3} \cdot \frac{\frac{1}{2}}{1 - \left(-\frac{z}{2}\right)} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n-1} - \frac{1}{6} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{z}{2}\right)^n =$$

$$= \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n-1} - \frac{1}{6} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} z^n,$$

тобто отримано ряд Лорана, який містить нескінченну множину доданків як у правильній, так і в головній частинах ряду Лорана. Знайдемо область його збіжності — кільце $K(0)$. Маємо:

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^{n+1}}{2^n}\right|} = \frac{1}{2}, \quad r = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{1} = 1.$$

Отже, областю збіжності знайденого ряду є кільце $K(0) = \{z: 1 < |z| < 2\}$.

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Наведіть приклад функції, яка має полюс другого порядку у точці $z = i$.
2. Наведіть приклад функції, для якої $z = \infty$ є суттєво особливою точкою.
3. Функція $f(z)$ має ізольовану особливу точку $z = a$ і записується в проколотому околі цієї точки у вигляді ряду Лорана $f(z) = \sum_{n=-2}^{\infty} c_n (z-a)^n$. Якого типу є особлива точка $z = a$ для функції $f(z)$?
4. Нехай точка $z = a$ є суттєвою особливою точкою функції $f(z)$. Чи може бути функція $f(z)$ обмеженою в околі точки $z = a$? Відповідь обґрунтуйте.
5. Нехай точка $z = 1$ є суттєвою особливою точкою функції $f(z)$. Чи є $z = 1$ особливою точкою для функції $\varphi(z) = \frac{1}{f(z)}$? Відповідь обґрунтуйте.

2.3.9. Лишки. Теореми про суму лишків

(Означення лишку функції, голоморфної в проколотому околі точки. Лишок в нескінченно віддаленій точці. Теореми Коші про суму лишків та повну суму лишків. Формули для обчислення лишків)

Поняття лишку корисне при вивченні ізольованих особливих точок і, зокрема, при обчисленні інтегралів від функцій комплексної змінної по межі області та від функцій дійсної змінної (невласних інтегралів, від тригонометричних поліномів). Це поняття визначається дещо по-різному для випадків скінченних особливих точок і для нескінченно віддаленої точки.

Означення 2.3.23. Нехай функція $f(z)$ є голоморфною в проколотому околі точки $z=a$, $a\in\mathbb{C}$, тобто на множині $\overset{\circ}{B}_r(a)=\left\{z:0<\left|z-a\right|<R\right\}$. Лишком функції $f(z)$ в точці $z=a$ називається величина:

$$\operatorname*{res}_{z=a} f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\left\{\left|z-a=\rho\right|\right\}^+} f(z)dz, \tag{2.3.40}$$

де $\rho\in(0;R)$.

Означення 2.3.24. Нехай функція $f(z)$ є голоморфною в проколотому околі точки $z=\infty$, тобто на множині $\overset{\circ}{B}_R(\infty)=\left\{z:\left|z\right|>R\right\}$. Лишком функції $f(z)$ в точці $z=\infty$ називається величина:

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\left\{\left|z\right|=\rho\right\}^+} f(z)\,dz, \tag{2.3.41}$$

де $\rho\in(R;+\infty)$.

Приклад 2.3.16. Обчислити лишок функції $f(z)=\dfrac{1}{z+1}$ в точці $z=-1$ і в точці $z=\infty$.

Розв'язання. Оскільки функція $f(z)=\dfrac{1}{z+1}$ є голоморфною в проколотому околі точки $z=-1$, то за означенням лишку в скінченній точці згідно з формулою (2.3.40) маємо:

$$\underset{z=a}{res}\, f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\{|z+1|=\rho\}^+}\frac{1}{z+1}dz=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^{2\pi}\frac{\rho i e^{it}dt}{-1+\rho e^{it}+1}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^{2\pi} idt=1.$$

Обчислимо лишок функції $f(z)=\dfrac{1}{z+1}$ в точці $z=\infty$. Згідно з означенням лишку в нескінченній точці за формулою (2.3.41) знаходимо:

$$\underset{z=\infty}{res}\, f(z)=\underset{z=\infty}{res}\frac{1}{1+z}=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\{|z|=\rho\}^+}\frac{1}{1+z}dz=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^{2\pi}\frac{d(\rho e^{it})}{1+\rho e^{it}}=$$

$$=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^{2\pi}\frac{d(\rho e^{it})}{1+\rho e^{it}}=-\frac{1}{2\pi i}Ln(\rho e^{it})\Big|_0^{2\pi}=-1.$$

Теорема 2.3.18. ***Теорема Коші про суму лишків***

Нехай G — обмежена область, межа якої $\partial G=\bigcup\limits_{k=0}^{n}\gamma_k$, де γ_k, $k=\overline{0,n}$, складається із замкнутих жорданових кривих, що не перетинаються, причому $\gamma_k\subset Int(\gamma_0)$, $k=\overline{1,n}$, γ_0 — крива, яка обмежує область G, функція $f(z)$ голоморфна в $\overline{G}\setminus\{a_1,a_2,\ldots,a_p\}$, де точки $a_k\notin\partial G$, $k=\overline{1,p}$. Тоді:

$$\int\limits_{\partial^+G} f(z)dz=2\pi i\sum_{k=1}^{p}\underset{z=a_k}{res} f(z) \qquad (2.3.42)$$

Доведення. Розглянемо таке число $r > 0$, що для довільного $k=\overline{1,p}$ окіл $\overline{B}_r(a_k)\subset G$ і при цьому $\overline{B}_r(a_i)\cap\overline{B}_r(a_j)=\varnothing$, $i,j=\overline{1,p}$. Позначимо $G_r=G\setminus\bigcup\limits_{k=1}^{p}\overline{B}_r(a_k)$. Тоді згідно з наслідком із теореми Коші про рівність інтегралів по гомотопних кривих маємо:

$$\int\limits_{\partial^+ G_r} f(z)dz=0 \qquad (2.3.43)$$

З іншої боку, враховуючи властивості адитивності інтеграла та теорему Коші про суму лишків, знаходимо:

$$\int\limits_{\partial^+ G_r} f(z)dz=\int\limits_{\partial^+ G} f(z)dz-\sum_{k=1}^{p}\int\limits_{\partial^+ B_r(a_k)} f(z)dz=\int\limits_{\partial^+ G} f(z)dz-2\pi i\sum_{k=1}^{p}\underset{z-a_k}{res}\,f(z).$$

Звідси, враховуючи співвідношення (2.3.43), отримуємо рівність (2.3.42).

Теорему доведено.

Теорема 2.3.19. *Теорема Коші про повну суму лишків*

Нехай функція *f(z)* голоморфна в $\mathbb{C}\setminus\{a_1,a_2,\ldots,a_p\}$, де $a_1,a_2,\ldots,a_p$ — деякі точки комплексної площини. Тоді:

$$\sum_{k=1}^{p}\underset{z=a_k}{res}\,f(z)+\underset{z=\infty}{res}\,f(z)=0 \qquad (2.3.44)$$

Доведення. Розглянемо таке число $R > 0$, що для довільного $k=\overline{1,p}$ $a_k\in B_R(0)$. Тоді за теоремою 2.3.18. про суму лишків маємо:

$$\int\limits_{\partial^+ B_R(0)} f(z)dz=2\pi i\sum_{k=1}^{p}\underset{z=a_k}{res}\,f(z).$$

Звідси, враховуючи означення лишку в нескінченно віддаленій точці, отримуємо рівність:

$$2\pi i \operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) + 2\pi i \sum_{k=1}^{p} \operatorname*{res}_{z=a_k} f(z) = 0,$$

яка еквівалентна рівності (2.3.44).

Теорему доведено.

Для обчислення лишків є ряд формул. Наведемо їх.

1. Нехай функція $f(z)$ голоморфна в проколотому околі $\overset{\circ}{B}_r(a) = \left\{ z : 0 < |z-a| < R \right\}$. Тоді, за теоремою Лорана, функція $f(z)$ може бути записана у вигляді суми ряду:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n, \ z \in \overset{\circ}{B}_r(a),$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\{|z-a|=\rho\}^+} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz,$$

звідки отримаємо формулу для лишку в скінченній точці:

$$\operatorname*{res}_{z=a} f(z) = c_{-1} \qquad (2.3.45)$$

2. Нехай функція $f(z)$ голоморфна в проколотому околі нескінченно відділеної точки $\overset{\circ}{B}_r(\infty) = \left\{ z : |z| > R \right\}$. Тоді аналогічно випадку скінченної точки маємо формулу для лишку в нескінченній точці:

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = -c_{-1} \qquad (2.3.46)$$

3. Нехай функція $f(z)$ голоморфна в проколотому околі $\overset{\circ}{B}_r(a) = \left\{ z : 0 < |z-a| < R \right\}$. Якщо скінченна точка $z=a$ є усувною особливою точкою, то

$$\underset{z=a}{res}\, f(z) = 0, \qquad (2.3.47)$$

бо головна частина ряду Лорана в околі такої точки дорівнює нулеві.

Примітка. Якщо точка $z = \infty$ — усувна особлива точка функції $f(z)$, то лишок цієї функції в точці $z = \infty$ *не обов'язково* дорівнює нулю.

4. Нехай функція $f(z)$ голоморфна в проколотому околі $\overset{\circ}{B}_r(a) = \left\{ z : 0 < \left| z - a \right| < R \right\}$, а точка $z = a$ є полюсом першого порядку. Тоді:

$$\underset{z=a}{res}\, f(z) = \lim_{z \to a} \left((z-a) f(z) \right) \qquad (2.3.48)$$

Доведення. Для доведення формули (2.3.48) застосуємо теорему про вигляд ряду Лорана в околі полюса першого порядку, згідно з якою маємо:

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{(z-a)} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n,\ z \in \overset{\circ}{B}_r(a) \qquad (2.3.49)$$

Домноживши обидві частини рівності (2.3.49) на $(z-a)$, знаходимо:

$$(z-a) f(z) = c_{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^{n+1},$$

звідки отримуємо $c_{-1} = \lim\limits_{z \to a} \left((z-a) f(z) \right)$.

5. Нехай функція $f(z)$ голоморфна в проколотому околі $\overset{\circ}{B}_r(a) = \left\{ z : 0 < \left| z - a \right| < R \right\}$, а точка $z = a$ є полюсом N-го порядку. Тоді лишок функції $f(z)$ в цій точці можна знайти, скориставшись формулою:

$$\operatorname*{res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{(N-1)!} \lim_{z\to a} \frac{d^{N-1}}{dz^{N-1}}\Big((z-a)^N f(z)\Big) \tag{2.3.50}$$

Доведення. Для доведення формули (2.3.50) застосуємо теорему про вигляд ряду Лорана в околі полюса N-го порядку. Маємо:

$$f(z) = \frac{c_{-N}}{(z-a)^{-N}} + \frac{c_{-N+1}}{(z-a)^{N-1}} + \ldots + \frac{c_{-1}}{(z-a)} + \\ + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n, \quad z \in \overset{\circ}{B}_r(a) \tag{2.3.51}$$

Домноживши співвідношення (2.3.49) на $(z-a)^N$, знаходимо:

$$(z-a)^N f(z) = c_{-N} + c_{-N+1}(z-a) + c_{-N+2}(z-a)^2 + \ldots + \\ + c_{-1}(z-a)^N + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^{n+N}.$$

Звідси отримуємо:

$$c_{-N} = \lim_{z\to a}\Big((z-a)^N f(z)\Big), \quad c_{-N+1} = \lim_{z\to a}\frac{d}{dz}\Big((z-a)^N f(z)\Big),$$

$$2!c_{-N+2} = \lim_{z\to a}\frac{d^2}{dz^2}\Big((z-a)^N f(z)\Big), \ldots,$$

$$(N-1)!c_{-1} = \lim_{z\to a}\frac{d^{N-1}}{dz^{N-1}}\Big((z-a)^N f(z)\Big).$$

Отже,

$$\operatorname*{res}_{z=a} f(z) = c_{-1} = \frac{1}{(N-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{N-1}}{dz^{N-1}}\Big((z-a)^N f(z)\Big).$$

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Яка відмінність в означеннях лишку функції для випадку скінченної точки та для випадку нескінченної точки?
2. Функція $f(z)$ має ізольовану особливу точку $z = a$ і записується в проколотому околі цієї точки у вигляді ряду Лорана $f(z) = \sum_{n=-10}^{\infty} c_n (z-a)^n$. Чому дорівнює лишок функції $f(z)$ в точці $z = a$?
3. За якою формулою обчислюють лишок функції в скінченній особливій точці типу полюса порядку 3?
4. Сформулюйте теорему Коші про суму лишків.
5. Чому дорівнює лишок функції $f(z)$ в її скінченній ізольованій особливій точці, яка є усувною?
6. Точка $z = \infty$ є усувною особливою точкою. Чи виконується рівність $\underset{z=\infty}{res} f(z) = 0$? Відповідь обґрунтуйте.

2.4. Диференціальні рівняння

2.4.1. Умови існування і єдиності розв'язку задачі Коші для диференціального рівняння першого порядку

(Загальний та частинний розв'язки диференціального рівняння. Задача Коші. Геометричний зміст початкових умов для диференціального рівняння першого порядку. Теорема існування і єдиності розв'язку задачі Коші для нормального диференціального рівняння першого порядку. Поняття про особливий розв'язок диференціального рівняння)

А. Загальний та частинний розв'язки диференціального рівняння. Задача Коші. Геометричний зміст початкової умови для диференціального рівняння першого порядку

Звичайне диференціальне рівняння першого порядку у загальному вигляді задається співвідношенням:

$$F(x, y, y') = 0 \tag{2.4.1}$$

або

$$y' = f(x, y), \tag{2.4.2}$$

де x — незалежна змінна, $y = y(x)$ — невідома (шукана) функція, $y' = y'(x)$ — її похідна. Незалежної змінної і шуканої функції може явно в рівнянні не бути, але похідна шуканої функції там є обов'язково. Диференціальне рівняння у вигляді (2.4.2) називають рівнянням, розв'язаним відносно похідної, або нормальним диференціальним рівнянням.

Будь-яка функція $y(x)$, яка перетворює диференціальне рівняння на певному проміжку у тотожність (інакше кажуть — задовольняє рівняння), називається розв'язком диференціального рівняння на цьому проміжку. Графік розв'язку диференціального рівняння називають інтегральною кривою цього рівняння.

Наприклад, $y' = x$ — диференціальне рівняння виду (2.4.2). Очевидно, що це рівняння на всій множині R задовольняє будь-яка функція виду $y = \frac{x^2}{2} + C$, де C — довільна стала. Тобто, рівняння має нескінченну множину розв'язків (однопараметричну сім'ю інтегральних кривих).

Виявляється, що й довільне диференціальне рівняння (2.4.2) при певних умовах (ці умови розглянемо далі) має нескінченну множину розв'язків, що залежать від однієї довільної сталої (параметра):

$$y = y(x, C) \tag{2.4.3}$$

або в неявному вигляді:

$$\Phi(x, y, C) = 0 \tag{2.4.4}$$

Множину (2.4.3) називають *загальним розв'язком* (а множину (2.4.4) — *загальним інтегралом*) диференціального рівняння (2.4.2). Розв'язок диференціального рівняння, отриманий із загального розв'язку (загального інтеграла) при конкретному значенні сталої C, називають *частинним* (або *окремим*) розв'язком (інтегралом) цього рівняння.

Зазвичай, щоб дістати частинний розв'язок диференціального рівняння (окрему інтегральну криву), задають так звану початкову умову, яку має задовольняти розв'язок:

$$y(x_0) = y_0 \tag{2.4.5}$$

Геометрично задання початкової умови означає вимогу знайти серед усіх інтегральних кривих рівняння ту криву, яка проходить через точку (x_0, y_0).

Вимога знайти розв'язок диференціального рівняння (2.4.2), який задовольняє початкову умову (2.4.5), називається задачею Коші.

Наприклад, задача Коші для розглянутого вище диференціального рівняння $y' = x$ з початковою умовою $y(0) = 3$ має розв'язок $y = \dfrac{x^2}{2} + 3$, який дістанемо, якщо у загальний розв'язок $y = \dfrac{x^2}{2} + C$ підставимо $x = 0$, $y = 3$ і зі співвідношення $3 = \dfrac{0^2}{2} + C$ знайдемо $C = 3$.

У багатьох випадках знайти точний розв'язок задачі Коші неможливо. Тоді задачу розв'язують наближено. Але при цьому треба бути впевненим, що розв'язок існує і єдиний.

Б. Теорема про існування і єдиність розв'язку задачі Коші для нормального диференціального рівняння 1-го порядку

Теорема 2.4.1. ***Теорема Пікара***

Нехай маємо рівняння (2.4.2) з початковою умовою (2.4.5), де функція $f(x, y)$ визначена і неперервна в деякій прямокутній області $\bar{D}: |x - x_0| \le a, \ |y - y_0| \le b$ і задовольняє в цій області умову Ліпшиця по змінній y:

$$\forall (x, y_1), (x, y_2) \in \bar{D} \exists L > 0 : \left| f(x, y_1) - f(x, y_2) \right| \le L \left| y_1 - y_2 \right| \quad (2.4.6)$$

Тоді на відрізку $\left[x_0 - h; x_0 + h \right]$, де $h = \min\left(a, \dfrac{b}{M}, \dfrac{1}{L} \right)$, $M = \max\limits_{(x, y) \in D} \left| f(x, y) \right|$ існує єдиний розв'язок $y(x)$ диференціального рівняння (2.4.2), який задовольняє початкову умову (2.4.5).

Доведення. Ідея доведення полягає у наступному. Дане диференціальне рівняння з початковою умовою замінюють рівносильним йому інтегральним рівнянням, яке у свою чергу задає інтегральне відображення. Переконавшись, що це відображення стискуюче, робимо висновок, що, згідно з теоремою Банаха, воно має єдину нерухому точку. Саме вона є тим єдиним розв'язком задачі Коші.

Спочатку переконаємося, що задача Коші (2.4.2)–(2.4.5) еквівалентна інтегральному рівнянню:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\left(t, y(t)\right)dt \tag{2.4.7}$$

Справді, нехай на деякому відрізку $I \subset [x_0 - a, x_0 + a]$ неперервна функція $y(x)$ з областю значень у множині $[y_0 - b, y_0 + b]$— розв'язок диференціального рівняння (2.4.2), який задовольняє умову $y(x_0) = y_0$ (тобто початкову умову (2.4.5)). Інтегруємо обидві частини рівняння (2.4.2) в межах від x_0 до x:

$$\int_{x_0}^{x} y'(t)dt = \int_{x_0}^{x} f\left(t, y(t)\right)dt \Leftrightarrow y(t)\Big|_{x_0}^{x} = \int_{x_0}^{x} f\left(t, y(t)\right)dt \Leftrightarrow y(x) =$$

$$= y(x_0) + \int_{x_0}^{x} f\left(t, y(t)\right)dt.$$

Ураховуючи, що $y(x_0) = y_0$, маємо остаточно: $y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\left(t, y(t)\right)dt$, тобто $y(x)$ — розв'язок інтегрального рівняння (2.4.7) на відрізку I.

Навпаки, нехай тепер неперервна функція $y(x)$, $x \in I$, є розв'язком інтегрального рівняння (2.4.7). Оскільки функція $f\left(t, y(t)\right)$ у правій частині рівності (2.4.7) неперервна і диференційовна (за властивістю визначеного інтеграла як функції верхньої межі), то й функція $y(x)$, що задається співвідношенням (2.4.7), неперервна і диференційована на I. Взявши похідну від обох частин рівності (2.4.7), будемо мати:

$$y'(x) = \frac{d}{dx}\left(y_0 + \int_{x_0}^{x} f\left(t, y(t)\right)dt\right) \text{ або те саме, що } y'(x) = f\left(x, y(x)\right),$$

а підставляючи в (2.4.7) $x = x_0 - y(x_0) = y_0$. Тобто $y(x)$ задовольняє диференціальне рівняння (2.4.2) і початкову умову (2.4.5).

Таким чином, задача Коші (2.4.2)–(2.4.5) еквівалентна інтегральному рівнянню (2.4.7). Тому далі доводитимемо існування і єдиність розв'язку інтегрального рівняння (2.4.7).

Праву його частину природно розглядати як інтегральний оператор U, який кожній неперервній на відрізку I функції $y(x)$, областю значень якої є підмножина відрізка $[y_0 - b, y_0 + b]$, ставить у відповідність неперервну функцію $y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f\left(t, y(t)\right)dt$; позначимо її $z(x)$. Тобто $z = Uy$.

Покажемо, що до оператора U може бути застосована теорема Банаха, згідно з якою стискуюче відображення, яке переводить повний метричний простір у себе, має єдину нерухому точку. Пересвідчимося: якщо $I = [x_0 - h, x_0 + h]$, то умови теореми Банаха для оператора U виконуються.

1. Область визначення оператора U — множина неперервних на відрізку $[x_0 - h, x_0 + h]$ функцій, тобто $y(x) \in C[x_0 - h, x_0 + h]$. Значення цих функцій належать проміжку $[y_0 - b, y_0 + b]$. Переконаємося, що оператор U кожну функцію $y(x)$ з множини $C[x_0 - h, x_0 + h]$ переводить у функцію $z(x)$ з цієї ж множини.

Справді, функція $z(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f\left(t, y(t)\right)dt$ неперервна на відрізку $[x_0 - h, x_0 + h]$ (показано вище) і, крім того, для кожної функції $y(x) \in C\left[x_0 - h, x_0 + h\right]$ і для всіх $x \in \left[x_0 - h, x_0 + h\right]$ маємо при $h = \min\left(a, \frac{b}{M}, \frac{1}{L}\right)$:

$$\left|z(x) - y_0\right| = \left|\int\limits_{x_0}^{x} f\left(t, y(t)\right)dt\right| \le \int\limits_{x_0}^{x} \left|f\left(t, y(t)\right)\right|dt \le M\left|x - x_0\right| \le Mh \le M \cdot \frac{b}{M} = b,$$

тобто усі значення функції $z(x)$ містяться на проміжку $[y_0 - b, y_0 + b]$. Отже, оператор U переводить повний метричний простір $C[x_0 - h, x_0 + h]$ у себе.

2. Покажемо, що U — оператор стиску, тобто відстань між будь-якими образами не перевищує відстані між їх прообразами. Маємо:

$$\forall z_1, z_2 : \rho\left(z_1, z_2\right) = \max_x \left|z_1\left(x\right) - z_2\left(x\right)\right| = \max_x \left|Uy_1\left(x\right) - Uy_2\left(x\right)\right| =$$

$$= \max_x \left| y_0 + \int_{x_0}^{x} f\left(t, y_1\left(t\right)\right)dt - y_0 - \int_{x_0}^{x} f\left(t, y_2\left(t\right)\right)dt \right| =$$

$$= \max_x \left| \int_{x_0}^{x} \left[f\left(t, y_1\left(t\right)\right) - f\left(t, y_2\left(t\right)\right)\right]dt \right| \le \max_x \int_{x_0}^{x} \left| f\left(t, y_1\left(t\right)\right) - f\left(t, y_2\left(t\right)\right)\right| dt \le$$

$$\le \int_{x_0}^{x} \max_x \left| f\left(t, y_1\left(t\right)\right) - f\left(t, y_2\left(t\right)\right)\right| dt \le L \max_x \left| y_1\left(t\right) - y_2\left(t\right)\right| \cdot \int_{x_0}^{x} dt =$$

$$= L\rho\left(y_1, y_2\right)\left|x - x_0\right| \le Lh\rho\left(y_1, y_2\right) \le L \cdot \frac{1}{L} \cdot \rho\left(y_1, y_2\right) = \rho\left(y_1, y_2\right).$$

Отже, U — оператор стиску, який переводить повний метричний простір у себе. Тому він має єдину нерухому точку. Інакше кажучи, існує єдина функція $y(x)$, визначена і неперервна на проміжку $\left[x_0 - h, x_0 + h\right]$, така, що виконується рівність $y\left(x\right) = Uy\left(x\right)$, або те саме, що $y\left(x\right) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\left(t, y\left(t\right)\right)dt$.

Тобто існує єдиний розв'язок інтегрального рівняння (2.4.7), а отже, й еквівалентної йому задачі Коші (2.4.2)–(2.4.5).

Теорему доведено.

Примітка. Умову Ліпшиця в теоремі Пікара не завжди вдається легко перевірити. Тому на практиці її часто заміняють жорсткішою, зате простішою для перевірки, умовою обмеженості частинної похідної по y функції $f\left(x, y\right)$.

Справді, якщо $\exists K > 0 : \left|f'\left(x, y\right)\right| \le K \ \forall\left(x, y\right) \in \overline{D}$, то:

$$\left|f(x,y_1)-f(x,y_2)\right|=f'_y\left(x,y_1+\theta\left|y_1-y_2\right|\right)\cdot\left|y_1-y_2\right|\le K\left|y_1-y_2\right|,$$

тобто виконується умова Ліпшиця (2.4.6).

Приклад 2.4.1

1. Задача Коші для диференціального рівняння $y' = y\sin x + e^x$ з будь-якою початковою умовою $y(x_0) = y_0$ має єдиний розв'язок, бо права його частина — неперервна функція, а її похідна по y обмежена:

$$\left|\frac{d}{dy}\left(y\sin x + e^x\right)\right| = \left|\sin x\right| \le 1 \;\; \forall (x,y)\in R^2.$$

2. У випадку диференціального рівняння $y' = 3\sqrt[3]{y^2}$ маємо іншу ситуацію. Права його частина $f(x,y)=3\sqrt[3]{y^2}$ неперервна в усіх точках $(x, y) \in R^2$. Частинна похідна $f'_y(x,y)=\dfrac{2}{\sqrt[3]{y}}$ стає необмеженою при $y = 0$, тобто в точках осі Ox. Отже, в цих точках може порушуватися умова єдиності розв'язку. І справді, $y = 0$ є розв'язком рівняння. А загальний розв'язок має вигляд: $y = (x + C)^3$. Тобто через кожну точку інтегральної кривої $y = 0$ (осі Ox) проходить інтегральна крива із сім'ї кривих загального розв'язку (*рис. 2.4.1*).

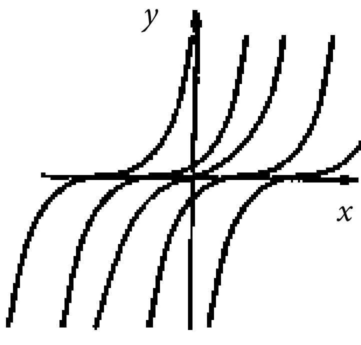


Рис. 2.4.1

Розв'язок диференціального рівняння, в кожній точці якого порушується умова єдиності, називається *особливим розв'язком*.

Отже, $y = 0$ — особливий розв'язок даного диференціального рівняння.

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Що таке загальний розв'язок диференціального рівняння?
2. Що таке частинний розв'язок диференціального рівняння?
3. Що таке задача Коші? Наведіть приклад задачі Коші для диференціального рівняння: а) першого порядку; б) другого порядку.
4. Який геометричний зміст задачі Коші для диференціального рівняння: а) першого порядку; б) другого порядку?
5. Доведіть, користуючись означенням, що функція $y = Ce^x$ є загальним розв'язком диференціального рівняння $y' - y = 0$.
6. Сформулюйте теорему Пікара існування і єдиності розв'язку задачі Коші для нормального диференціального рівняння першого порядку. Яка ідея її доведення?
7. Що таке умова Ліпшиця для функції $f(x, y)$? Який її зв'язок із обмеженістю частинної похідної по y функції $f(x, y)$?
8. Що таке особливий розв'язок диференціального рівняння? Дайте його геометричну інтерпретацію. Наведіть приклад.

2.4.2. Стійкість лінійних систем диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами

(Основні поняття теорії стійкості. Стійкість лінійних систем диференціальних рівнянь. Класифікація точок спокою)

Багато реальних процесів та явищ описуються диференціальними рівняннями та системами диференціальних рівнянь. Однак для того щоб висновки, зроблені на основі побудованої математичної моделі, відповідали дійсності, модель має бути коректною. З'ясуємо, який вкладається зміст у поняття коректності у випадку, коли математичною моделлю деякого процесу виступає нормальна система диференціальних рівнянь:

$$\dot{x}_i = f_i(t, x_1, \ldots, x_n),\ t \in I,\ i = \overline{1,n} \tag{2.4.8}$$

функції $f_i(t, x)$ $(x \in D)$ визначені в просторі $\left(I \times D\right) \subset R^{n+1}$, де $I = (a; +\infty)$, $D \subseteq R^n$.

Система (2.4.8) називається *ідеальною* або *незбуреною*. Для забезпечення коректності вона має задовольняти ряд вимог.

1. Для будь-якої точки $(t_0, x_0) \in I \times D$ задача Коші $\dot{x}_i = f_i(t, x)$, $x(t_0) = x_0$ повинна мати єдиний розв'язок (*умови існування та єдиності розв'язку задачі Коші див. 2.4.1*).

2. При створенні ідеалізованої математичної моделі не бралися до уваги деякі другорядні фактори (так звані збурення), які в реальній ситуації впливають на перебіг досліджуваного процесу. Окрім того, на практиці початкові дані процесу неможливо визначити абсолютно точно. Якщо малі зміни початкових умов $x(t_0) = x_0$ зумовлюють значні відхилення розв'язків, то такі розв'язки навіть наближено не описують розглядуване явище.

Тобто, ми маємо бути впевненими, що в разі заміни задачі Коші $\dot{x}_i = f_i(t, x)$, $x(t_0) = x_0$ будь-якою збуреною щодо неї задачею $\dot{\tilde{x}}_i = \tilde{f}_i(t, \tilde{x})$, $\tilde{x}(\tilde{t}_0) = \tilde{x}_0$ можна буде, принаймні на скінченному проміжку, забезпечити наперед задане, досить мале відхилення збуреного розв'язку $\tilde{x}(t)$ від незбуреного $x(t)$ за рахунок достатньої близькості початкових даних (t_0, x_0) і $(\tilde{t}_0, \tilde{x}_0)$ та правих частин f і $\tilde{f}$.

Умови, при яких малі зміни початкових даних призводять до малих відхилень розв'язків системи (2.4.8), дає наступна теорема.

Теорема 2.4.2

Нехай функції $f_i(t, x)$ є неперервними в деякій області $(I \times D) \subset R^{n+1}$ і задовольняють умови теореми Коші, тобто розв'язок $x(t)$, $t \in I$ задачі Коші $\dot{x}_i = f_i(t,x)$, $x(t_0) = x_0$ має властивість єдиності. Тоді на будь-якому відрізку $J \subset I$ розв'язок $x(t)$, $t \in I$ є стійким щодо збурень початкових даних (t_0, x_0) та правої частини $f_i(t,x)$.

Системи, які задовольняють умови даної теореми, називаються стійкими щодо збурень початкових даних та правої частини на скінченному проміжку часу.

Однак теорема 2.4.2 мало придатна для дослідження процесів, які можуть тривати практично нескінченно довго ($t \to +\infty$). Тобто, близькість початкових умов та правих частин не гарантує стійкість щодо збурень для системи (2.4.8).

Наприклад, розглянемо два скалярних рівняння: $\dot{x} = -x$ та $\dot{x} = x$. Розв'яжемо для них задачу Коші з початковою умовою $x(0) = x_0$.

1. Для першого рівняння $\dot{x} = -x$: $\dfrac{dx}{dt} = -x \Rightarrow dx = -xdt \Rightarrow$

$$\frac{dx}{x} = -dt \Rightarrow \int \frac{dx}{x} = -\int dt \Rightarrow \ln|x| = -t + C \Rightarrow e^{\ln|x|} = e^{-t+C} \Rightarrow$$

$$|x| = e^{-t} \cdot e^{C} \Rightarrow x = C_1 e^{-t}.$$

Тобто, $x = C_1 e^{-t}$ є загальним розв'язком рівняння $\dot{x} = -x$.

Ураховуючи початкову умову $(0, x_0)$, знаходимо C_1: $x_0 = C_1 e^0 \Rightarrow C_1 = x_0$. Отже, задача Коші має розв'язок $x = x_0 e^{-t}$.

2. Аналогічні перетворення проведемо для рівняння $\dot{x} = x$:

$$\frac{dx}{dt} = x \Rightarrow dx = xdt \Rightarrow \frac{dx}{x} = dt \Rightarrow \int \frac{dx}{x} = \int dt \Rightarrow \ln|x| = t + C \Rightarrow$$

$$e^{\ln|x|} = e^{t+C} \Rightarrow |x| = e^t \cdot e^C \Rightarrow x = C_1 e^t.$$

Тобто, $x = C_1 e^t$ є загальним розв'язком рівняння $\dot{x} = x$. Ураховуючи початкову умову (0; x_0), знаходимо C_1: $x_0 = C_1 e^0 \Rightarrow C_1 = x_0$. Отже, задача Коші має розв'язок $x = x_0 e^t$.

Як бачимо, на проміжку (0; +∞) розв'язки $x = x_0 e^{-t}$ та $x = x_0 e^t$ відповідно рівнянь $\dot{x} = -x$ та $\dot{x} = x$ неперервно залежать від t і x_0, але при $t \to +\infty$ наслідки збурення початкових даних для кожного з рівнянь виявляються різними.

Припустимо, що $\delta \ll 1$ — задане збурення, тобто x_0 відображається в $\tilde{x}_0 = x_0 + \delta$. Для першого рівняння неточність у виборі початкового значення нівелюється з часом: $\left| x_0 e^{-t} - (x_0 + \delta) e^{-t} \right| = |\delta| e^{-t} \to 0$ при $t \to +\infty$.

Для другого ж — ні: $\left| x_0 e^t - (x_0 + \delta) e^t \right| = |\delta| e^t \to +\infty$ при $t \to +\infty$. Так, неточність у виборі початкового значення порядку 1 % ($\delta = 0{,}01$, $t = 0 \Rightarrow \delta e^t = 0{,}01 \cdot e^0 = 0{,}01$) виливається у 20-відсоткову похибку при обчисленні значення розв'язку в момент часу $t = 3$: $\delta = 0{,}01$, $t = 3 \Rightarrow$ $\delta e^t = 0{,}01 \cdot e^3 = 0{,}01 \cdot 19{,}68 \approx 0{,}20$.

Для дослідження характеру залежності розв'язків диференціальних рівнянь від початкових умов на великих інтервалах часу ($t \to +\infty$) наприкінці XIX сторіччя О.М. Ляпуновим (1857–1918) було створено строгу теорію стійкості руху.

Означення 2.4.1. Розв'язок $x_i = \varphi_i(t)$ системи (2.4.8) називають стійким за Ляпуновим (при $t \to +\infty$), якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, таке, що для кожного розв'язку $x_i = \psi_i(t)$ даної системи, який в момент часу t_0 задовольняє нерівність:

$$\left|\varphi_i(t_0)-\psi_i(t_0)\right|<\delta,\ i=\overline{1,n}$$

для всіх $t > t_0$ виконується нерівність:

$$\left|\varphi_i(t)-\psi_i(t)\right|<\varepsilon,\ i=\overline{1,n}.$$

Геометрична інтерпретація означення 2.4.1 наступна: графік кожного розв'язку, який в момент часу t_0 виходить з δ-околу точки $(t_0; \varphi_i(t_0))$ повинен належати ε-трубці графіка розв'язку $\varphi(t)$.

Означення 2.4.2. Розв'язок $x_i = \varphi_i(t)$ системи (2.4.8) називають асимптотично стійким за Ляпуновим (при $t \to +\infty$), якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, що для довільного розв'язку $x_i = \psi_i(t)$ даної системи, який в момент часу t_0 задовольняє нерівність:

$$\left|\varphi_i(t_0)-\psi_i(t_0)\right|<\delta,\ i=\overline{1,n}$$

для всіх $t > t_0$ виконується рівність:

$$\lim_{t\to+\infty}\left|\varphi_i(t)-\psi_i(t)\right|=0,\ i=\overline{1,n}.$$

Означення 2.4.3. Розв'язок $x_i = \varphi_i(t)$ системи (2.4.8) називають нестійким за Ляпуновим (при $t \to +\infty$)), якщо існує принаймні один розв'язок, для якого в момент часу t_0 виконується нерівність $\left|\varphi_i(t_0)-\psi_i(t_0)\right|<\delta$, але $\left|\varphi_i(t)-\psi_i(t)\right|>\varepsilon$ для всіх $t > t_0$, $i=\overline{1,n}$.

Зауважимо, що задачу про стійкість розв'язку $x = \varphi(t)$, $x \in D \subseteq R^n$ системи (2.4.8) можна звести до задачі про стійкість нульового розв'язку (точки спокою) деякої системи $\dot{y}=F(t,y)$, отриманої з вихідної заміною змінних $x = y + \varphi(t)$.

Перехід від системи виду $\dot{x}=f(t,x)$ до системи $\dot{y}=F(t,y)$ не завжди є простим. По-перше, потрібно знати розв'язок $x = \varphi(t)$. По-друге, отримана система може бути складнішою, аніж система виду $\dot{x}=f(t,x)$. Однак можливість самого переходу від дослідження стійкості довільного розв'язку до дослідження стійкості нульового є важливою як з теоретичної, так і з практичної точки зору.

Повернемось до системи (2.4.8) і розглянемо найпростіший її випадок — лінійну однорідну систему диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами:

$$\dot{x} = Ax,\ \ x \in D \subseteq R^n, \qquad (2.4.9)$$

де A — стала матриця (порядку n) коефіцієнтів системи.

Умови стійкості системи (2.4.9) дає наступна теорема.

Теорема 2.4.3

Розв'язки системи (2.4.9) є *стійкими*, якщо дійсні частини всіх власних значень матриці A недодатні ($\mathrm{Re}\lambda_i \le 0$), *асимптотично стійкими* — якщо дійсні частини всіх власних значень матриці A від'ємні ($\mathrm{Re}\lambda_i < 0$), *нестійкими* — якщо серед власних значень матриці є хоча б одне з додатною дійсною частиною.

Нагадаємо, що власні значення матриці є коренями характеристичного рівняння $\left|A - \lambda E\right| = 0$.

Приклад 2.4.2. Дослідити на стійкість точку спокою системи $\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x \end{cases}$ та з'ясувати, якими будуть траєкторії її розв'язків.

Розв'язання. Характеристичне рівняння заданої системи $\left|A - \lambda E\right| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$ або те саме, що $\lambda^2 + 1 = 0$, має два суто уявні корені: $\lambda_{1,2} = \pm i$. Згідно з теоремою 2.4.3, враховуючи, що $\mathrm{Re}\lambda_i = 0$, точка спокою системи є стійкою.

Траєкторії розв'язків системи визначаються рівнянням $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{y}$. Це рівняння з відокремлюваними змінними. Розв'язуючи його, отримуємо: $x^2 + y^2 = C$.

Отже, траєкторіями (фазовими кривими) системи є концентричні кола з центром в точці (0; 0), а сама точка спокою в даному випадку називається центром.

Умови стійкості (асимптотичної стійкості) точок спокою лінійних однорідних систем та вигляд фазових траєкторій в кожному з випадків наведені в *табл. 2.4.1.*

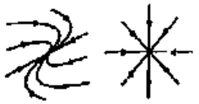
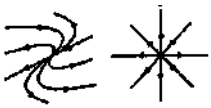
З теореми 2.4.3 випливає, що задача про стійкість нульового розв'язку лінійної системи зі сталими коефіцієнтами зводиться до задачі про визначення знаку дійсних частин коренів відповідного характеристичного рівняння. Якщо степінь характеристичного рівняння досить високий, то розв'язання рівняння є не надто простим завданням.

Критерій Рауса-Гурвіца (або просто критерій Гурвіца) дозволяє уникнути процесу знаходження коренів характеристичного рівняння при дослідженні стійкості розв'язків лінійних систем. Критерій Гурвіца формулює умови, при виконанні яких дійсні частини коренів відповідного характеристичного рівняння будуть від'ємними, а отже, нульовий розв'язок лінійної системи зі сталими коефіцієнтами — асимптотично стійким.

Таблиця 2.4.1

КЛАСИФІКАЦІЯ ТОЧОК СПОКОЮ

Корені λ_1, λ_2		**Фазові портрети**	**Стійкість /характер точок спокою**
Дійсні: $\lambda_1 \neq \lambda_2$	$\lambda_1 < 0$ $\lambda_2 < 0$		Асимптотично стійка: стійкий вузол
	$\lambda_1 > 0$ $\lambda_2 > 0$		Нестійка: нестійкий вузол
	$\lambda_1 > 0$ $\lambda_1 < 0$		Нестійка: сідло

Корені λ_1, λ_2		**Фазові портрети**	**Стійкість /характер точок спокою**
Дійсні: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$	$\lambda < 0$		Асимптотично стійка: стійкий вироджений вузол
	$\lambda > 0$		Нестійка: нестійкий вироджений вузол
Комплексні: $\lambda_1 = \alpha + \beta i$ $\lambda_2 = \alpha - \beta i$	$\alpha < 0$ $\beta \neq 0$		Асимптотично стійка: стійкий фокус
	$\alpha > 0$ $\beta \neq 0$		Нестійка: нестійкий фокус
	$\alpha = 0$ $\beta \neq 0$		Стійка: центр

Теорема 2.4.4. *Критерій Гурвіца*

Для того щоб усі корені рівняння $a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$, $a_0 > 0$ мали від'ємні дійсні частини, необхідно і достатньо, щоб всі головні діагональні мінори матриці Гурвіца були додатні.

Матриця Гурвіца має вигляд: $H = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \ldots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \ldots & 0 \\ a_7 & a_6 & a_5 & a_4 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & a_n \end{pmatrix}$.

Многочлен $f_n(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n$, всі корені якого мають від'ємні дійсні частини, називається *многочленом Гурвіца*.

Наслідок. Для того щоб усі корені рівняння $a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$, $a_0 > 0$ мали недодатні дійсні частини, необхідно і достатньо, щоб всі головні діагональні мінори матриці Гурвіца були невід'ємні.

Приклад 2.4.3. Встановити, чи є асимптотично стійким нульовий розв'язок лінійної системи зі сталими коефіцієнтами, якщо характеристичне рівняння даної системи має вигляд: $\lambda^5 + 3\lambda^4 + 5\lambda^3 + 5\lambda^2 + 3\lambda + 1 = 0$.

Розв'язання. Випишемо коефіцієнти характеристичного рівняння: $a_0 = 1$, $a_1 = 3$, $a_2 = 5$, $a_3 = 5$, $a_4 = 3$, $a_5 = 1$.

Обчислимо послідовно головні діагональні мінори матриці Гурвіца:

$$\Delta_1 = a_1 = 3 > 0,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} = 10 > 0,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 5 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 26 > 0,$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 \\ a_7 & a_6 & a_5 & a_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 36 > 0$$

і, нарешті, $\Delta_5 = a_5 \cdot \Delta_4 = 1 \cdot 36 > 0$.

Оскільки всі головні діагональні мінори матриці Гурвіца додатні, то, згідно з критерієм Гурвіца, нульовий розв'язок лінійної системи асимптотично стійкий.

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Для дослідження стійкості яких процесів побудована теорія Ляпунова?
2. Який розв'язок називається стійким за Ляпуновим?
3. Який розв'язок називається асимптотично стійким за Ляпуновим?
4. В чому полягає геометричний зміст стійкості (асимптотичної стійкості) розв'язку?
5. Запишіть характеристичне рівняння для лінійної однорідної системи диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами виду $\dot{x} = Ax,\ x \in D \subseteq R^n$.
6. Як стійкість нульового розв'язку лінійної системи зі сталими коефіцієнтами залежить від знаку дійсних частин коренів відповідного характеристичного рівняння?
7. Сформулюйте критерій Гурвіца. Запишіть матрицю Гурвіца для многочлена

   $f_n(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n$.
8. На які класи поділяються точки спокою лінійних систем у залежності від значень коренів відповідних характеристичних рівнянь?

Навчальне видання

АСТАФ'ЄВА Марія Миколаївна
ЛИТВИН Оксана Степанівна
РАДЧЕНКО Сергій Петрович
САМОЙЛЕНКО Юлія Іванівна
СЕМЕНЯКА Світлана Олексіївна

ВИЩА МАТЕМАТИКА: ГОТУЄМОСЬ ДО АТЕСТАЦІЇ

У двох частинах

Частина І

ТЕОРЕТИЧНІ МАТЕРІАЛИ

Навчальний посібник для студентів спеціальності 111 «Математика» першого (бакалаврського) освітнього рівня

За зміст і якість поданих матеріалів відповідають автори

Науково-методичний центр видавничої діяльності
Київського університету імені Бориса Грінченка

Завідувачка НМЦ видавничої діяльності *М.М. Прядко*
Відповідальна за випуск *А.М. Даниленко*
Над виданням працювали *О.А. Марюхненко, Т.В. Нестерова, Н.І. Погорєлова*

Підписано до друку 11.11.2022 р. Формат 60х84/16.
Ум. друк. арк. 10,23. Наклад 100 пр. Зам. № 2-29.

Київський університет імені Бориса Грінченка,
вул. Бульварно-Кудрявська, 18/2, м. Київ, 04053.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 4013 від 17.03.2011 р.