

Київський університет імені Бориса Грінченка
Факультет інформаційних технологій та математики
Кафедра математики і фізики



“ЗАТВЕРДЖУЮ”

Проректор з науково-методичної та навчальної роботи
Олександр ЖИЛЬЦОВ
_____ 2023 р.

РОБОЧА ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

ФУНКЦІОНАЛЬНИЙ АНАЛІЗ ТА ВАРІАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ

спеціальності	<u>111 Математика</u>
освітнього рівня	<u>першого (бакалаврського)</u>
освітньої програми	<u>111.00.01 Математика</u>

Київ – 2023

КИЇВСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ БОРИСА ГРІНЧЕНКА
Ідентифікаційний код 02136554
Начальник відділу
моніторингу якості освіти

Програма № 0480/23
Жильцов
(підпис) (прізвище, ініціали)

« » 20 23 р.

Розробник:


Самойленко Валерій Григорович, доктор фізико-математичних наук, професор, член-кореспондент НАН України, професор кафедри математики і фізики Факультету інформаційних технологій та математики.

Викладач

Самойленко Валерій Григорович, доктор фізико-математичних наук, професор, член-кореспондент НАН України, професор кафедри математики і фізики Факультету інформаційних технологій та математики

Робочу програму розглянуто і затверджено на засіданні кафедри математики і фізики

Протокол від 23 серпня 2023 р. № 8

Завідувач кафедри  Світлана СЕМЕНЯКА

Робочу програму погоджено з гарантом освітньої програми (керівником освітньої програми) 111.00.01 Математика

23. 08. 2023 р.

Керівник освітньої програми  Марія АСТАФ'ЄВА
(підпис)

Робочу програму перевірено

___ . ___ . 2023 р.

Заступник директора/декана  Євген ІВАНІЧЕНКО

Пролонговано:

на 20__/20__ н.р. _____ (підпис) (_____ (ПІБ)), « ___ » ___ 20__ р., протокол № ___

на 20__/20__ н.р. _____ (підпис) (_____ (ПІБ)), « ___ » ___ 20__ р., протокол № ___

на 20__/20__ н.р. _____ (підпис) (_____ (ПІБ)), « ___ » ___ 20__ р., протокол № ___

на 20__/20__ н.р. _____ (підпис) (_____ (ПІБ)), « ___ » ___ 20__ р., протокол № ___

1. Опис навчальної дисципліни

Найменування показників	Характеристика дисципліни за формами навчання	
	денна	заочна
Вид дисципліни	обов'язкова	
Мова викладання, навчання та оцінювання	українська	
Загальний обсяг кредитів / годин	4 / 120	
Курс	4	
Семестр	7	
Кількість змістових модулів з розподілом:	4	
Обсяг кредитів	4	
Обсяг годин, в тому числі:	120	
Аудиторні	56	
Модульний контроль	8	
Семестровий контроль	30	
Самостійна робота	26	
Форма семестрового контролю	екзамен	

2. Мета та завдання навчальної дисципліни

Мета: формування у студентів знань, вмінь і навичок з основ функціонального аналізу у професійній діяльності, зокрема, в освітній галузі, а також для вивчення математичних моделей різних фізичних процесів і явищ, зокрема, дослідження різних варіаційних задач.

Завдання: отримання базових знань з функціонального аналізу, серед яких поняття і властивості гільбертових, банахових просторів, поняття функціоналу та оператора; отримання знань з теорії перетворення Фур'є, ортогональних рядів Фур'є; набуття студентами практичних навичок щодо дослідження різних варіаційних задач.

Компетентності, формуванню яких сприяє навчальна дисципліна.

Загальні компетентності

- ЗК-1** Здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу.
- ЗК-2** Здатність застосовувати знання у практичних ситуаціях.
- ЗК-3** Знання й розуміння предметної області та професійної діяльності.
- ЗК-4** Здатність спілкуватися державною мовою як усно, так і письмово.
- ЗК-7** Здатність учитися і оволодівати сучасними знаннями.
- ЗК-8** Здатність до пошуку, обробки та аналізу інформації з різних джерел.
- ЗК-9** Здатність приймати обґрунтовані рішення.
- ЗК-10** Здатність працювати в команді.
- ЗК-12** Здатність працювати автономно.
- ЗК-13** Визначеність і наполегливість щодо поставлених завдань і взятих обов'язків.

Спеціальні (фахові) компетентності

- СК-1** Здатність формулювати проблеми математично та в символічній формі з метою спрощення їхнього аналізу й розв'язання.
- СК-2** Здатність подавати математичні міркування та висновки з них у формі, придатній для цільової аудиторії, а також аналізувати та обговорювати математичні міркування інших осіб, залучених до розв'язання тієї самої задачі.

СК-3 Здатність здійснювати міркування та виокремлювати ланцюжки міркувань у математичних доведеннях на базі аксіоматичного підходу, а також розташовувати їх у логічну послідовність, у тому числі відрізняти основні ідеї від деталей і технічних викладок.

СК-4 Здатність конструювати формальні доведення з аксіом та постулатів і відрізняти правдоподібні аргументи від формально бездоганих).

СК-5 Здатність до кількісного мислення

СК-6 Здатність розробляти і досліджувати математичні моделі явищ, процесів та систем

СК-8 Здатність до аналізу математичних структур, у тому числі до оцінювання обґрунтованості й ефективності використовуваних математичних підходів.

СК-11 Здатність застосовувати математичні факти, теореми, методи й алгоритми, пакети програмного забезпечення до розв'язування прикладних задач із різних сфер життєдіяльності людини й суспільства.

3. Результати навчання за дисципліною

У результаті вивчення навчальної дисципліни студент повинен знати:

- першу та другу нерівності Коші; простір неперервних функцій, простір інтегрованих з квадратом функцій;
- означення скрізь щільної множини, сепарабельного простору.
- означення норми та нормованих просторів, збіжності за нормою;
- поняття скалярного добутку, збіжності, означення гільбертового простору;
- означення ортогонального ряду Фур'є, рівність Парсеваля;
- означення неперервного функціоналу, норми функціоналу;
- означення неперервного оператора, норми оператора;
- поняття першої та другої варіації функціоналів, сильного та слабкого екстремумів, необхідні умови існування екстремумів функціоналів, поняття екстремалі ; рівняння Ейлера для визначення екстремалей, поняття першої варіаційної задачі на множині функцій із фіксованими межами та алгоритм її дослідження властивості;
- задачу Больца на множині функцій із фіксованими межами, необхідні умови існування екстремуму для задачі Больца, умови трансверсальності;
- задачі Лагранжа і Больца на множині функцій із вільними межами, необхідні умови існування їх розв'язків,
- задачі Лагранжа і Больца на множині функцій із рухомими межами, необхідні умови існування їх розв'язків, ізопериметричну задачу та метод множників Лагранжа для її розв'язання;
- достатні умови існування екстремуму для першої варіаційної задачі другого порядку, зокрема, умову Лежандра, поняття спряженої задачі варіаційного числення, умову Якобі та достатні умови існування локального екстремуму.

вміти:

- доводити першу та другу нерівності Коші;
- знаходити норму елементів нормованого простору;
- досліджувати збіжність за нормою елементів нормованого простору;
- досліджувати властивості нормованих просторів, серед яких повнота, сепарабельність;
- досліджувати ортогональність системи елементів;
- досліджувати неперервність функціоналів, знаходити норми функціоналів;
- досліджувати неперервність операторів, знаходити норми операторів;

- досліджувати першу варіаційну задачу на слабкий локальний екстремум: знаходити відповідні допустимі екстремалі із необхідних умов існування локальних екстремумів та доводити, що на знайденій екстремалі досягається локальний екстремум або показувати, що розглядувана задача не має розв'язків;
- досліджувати задачу Больца: знаходити відповідні допустимі екстремалі із необхідних умов існування локальних екстремумів із використанням рівняння Ейлера та умов трансверсальності та доводити, що на знайденій екстремалі досягається локальний екстремум або показувати, що розглядувана задача не має розв'язків;
- досліджувати задачу Лагранжа і Больца на множині функцій із вільними межами та доводити, що на знайдених екстремалях досягається локальний екстремум або показувати, що розглядувана задача не має розв'язків;
- досліджувати задачі Лагранжа на множині функцій із рухомими межами із використанням необхідних умов існування їх розв'язків;
- за допомогою методу множників Лагранжа досліджувати задачу Больца на множині функцій із рухомими межами та ізопериметричну задачу;
- застосовувати достатні умови другого порядку для дослідження існування локальних слабких екстремумів

та досягти наступних програмних результатів навчання:

РН-1 Знати основні етапи історичного розвитку математичних знань і парадигм, розуміти сучасні тенденції в математиці.

РН-3 Знати принципи *modus ponens* (правило виведення логічних висловлювань) та *modus tollens* (доведення від супротивного) і використовувати умови, формулювання, висновки, доведення та наслідки математичних тверджень..

РН-7 Пояснювати математичні концепції мовою, зрозумілою для нефахівців у галузі математики.

РН-8 Здійснювати професійну письмову й усну комунікацію українською мовою та однією з іноземних мов.

РН-10 Розв'язувати задачі придатними математичними методами, перевіряти умови виконання математичних тверджень, коректно переносити умови та твердження на нові класи об'єктів, знаходити й аналізувати відповідності між поставленою задачею й відомими моделями.

РН-11 Розв'язувати конкретні математичні задачі, які сформульовано у формалізованому вигляді; здійснювати базові перетворення математичних моделей.

РН-16 Знати теоретичні основи і застосовувати методи топології, функціонального аналізу й

теорії диференціальних рівнянь для дослідження динамічних систем

4. Структура навчальної дисципліни

Назви змістових модулів і тем	Кількість годин				
	денна форма				
	Усього	у тому числі			
Л.		П	МК	СР	
Змістовий модуль 1					
Змістовий модуль 1. Метричні, банахові та гільбертові простори					
Тема 1. Метричні та банахові простори	12	4	4		4
Тема 2. Гільбертові простори та їх властивості	12	4	4		4
Разом за змістовим модулем 1	26	8	8	2	8
Змістовий модуль 2. Функціонали і оператори					
Тема 3. Неперервні функціонали	12	4	4		4
Тема 4. Неперервні оператори, їх властивості	12	4	4		4
Разом за змістовим модулем 2	26	8	8	2	8
Змістовий модуль 3. Необхідні умови існування екстремумів для задач із фіксованими та рухомими межами					
Тема 5. Перша варіація функціоналу. Сильний та слабкий екстремум. Необхідна умова існування екстремуму	10	4	4		2
Тема 6. Задача Лагранжа та задача Больца. Необхідні умови існування екстремумів. Рівняння Ейлера	12	4	4		4
Разом за змістовим модулем 3	24	8	8	2	6
Змістовий модуль 4. Достатні умови існування локальних екстремумів					
Тема 7. Друга варіація функціоналів, спряжена задача. Достатні умови існування слабого екстремуму для задачі Лагранжа	12	4	4		4
Разом за змістовим модулем 4	14	4	4	2	4
Семестровий контроль					
Усього годин	120	28	28	8	26

5. Програма навчальної дисципліни

Змістовий модуль 1. Метричні, банахові та гільбертові простори.

Тема 1. Метричні та банахові простори

Означення множини, метрики, метричних просторів. Замкнуті та відкриті множини, замикання множини. Фундаментальна послідовність. Поняття еквівалентних метрик. Приклади метричних просторів. Простір неперервних функцій, простір інтегрованих функцій, множина числових послідовностей l_p , множина інтегрованих за Лебегом функцій.

Тема 2. Гільбертові простори та їх властивості.

Поняття скалярного добутку. Приклади просторів зі скалярним добутком. Збіжність за нормою та слабка збіжність послідовності елементів з простору зі скалярним добутком. Означення гільбертового простору. Приклади гільбертових просторів

Змістовий модуль 2. Функціонали і оператори.

Тема 3. Неперервні функціонали.

Означення неперервного та лінійного функціоналу. Слабка збіжність функціоналів. Норма функціоналу. Приклади неперервних функціоналів.

Тема 4. Неперервні оператори, їх властивості.

Означення лінійного та неперервного оператора. Норма оператора. Сильна та слабка збіжність операторів.

Змістовий модуль 3. Необхідні умови існування екстремумів для задач із фіксованими та рухомими межами

Тема 5. Перша варіація функціоналу. Сильний та слабкий екстремум. Необхідна умова існування екстремуму.

Перша варіація функціоналу, основна лема варіаційного числення. Сильний та слабкий екстремуми функціоналу. Необхідні умови екстремуму функціоналу.

Тема 6. Задача Лагранжа та задача Больца. Необхідні умови існування екстремумів. Рівняння Ейлера

Найпростіша задача варіаційного числення (задача Лагранжа) на множині функцій із фіксованими межами. Необхідна умова існування слабого екстремуму, рівняння Ейлера. Поняття допустимої множини, екстремалі, допустимої екстремалі. Задача Больца. Необхідні умови існування розв'язку задачі Больца, умови трансверсальності.

Змістовий модуль 4. Достатні умови існування локальних екстремумів

Тема 7. Друга варіація функціоналів, спряжена задача. Достатні умови існування слабого екстремуму для задачі Лагранжа.

Друга варіація функціоналу. Умова Лежандра, посилена умова Лежандра. Спряжена задача варіаційного числення, рівняння Якобі та умова Якобі. Достатні умови слабого екстремуму для задачі Лагранжа.

6 Контроль навчальних досягнень

6.1 Система оцінювання навчальних досягнень студентів

№ з/п	Вид діяльності студента	Макс. кількість балів за одиницю	Модуль 1		Модуль 2		Модуль 3		Модуль 4	
			Кільк. одиниць до розрахунку	Макс. кількість балів за вид	Кільк. одиниць до розрахунку	Макс. кількість балів за вид	Кільк. одиниць до розрахунку	Макс. кіль-кість балів за вид	Кільк. одиниць до розрахунку	Макс. кіль-кість балів за вид
1	Відвідування лекцій	1	4	4	4	4	4	4	2	2
2	Відвідування практичних занять	1	4	4	4	4	4	4	2	2
3	Виконання завдань для самостійної роботи	5	1	5	1	5	1	5	1	5
4	Робота на практичних	10	4	40	4	40	4	40	2	20
5	Виконання модульної контрольної роботи	25	1	25	1	25	1	25	1	25
	Разом	300		78		78		78		54
	Максимальна кількість балів:	60 (іспит – 40 балів)								
	Розрахунок коефіцієнта	60/288 = 0,21								

* На практичному занятті оцінюється усна або / та письмова відповідь, ураховується також виконання домашнього завдання. За кожний змістовий модуль студент може отримати максимально 40 балів і це число балів є середнім арифметичним (округленим до цілого) балів, отриманих на тих практичних заняттях даного змістового модуля, де він був опитаний і оцінений. Якщо цей середній арифметичний показник менший, ніж 6 балів,

студент має відповідні теми модуля опрацювати і в індивідуальному порядку здати викладачу; іншими видами робіт бали не компенсуються.

6.2. Завдання для самостійної роботи та критерії її оцінювання

№ з/п	Назва теми	Кількість годин	Бали
Змістовий модуль 1. Метричні, банахові та гільбертові простори		8	5
1	Метричні та банахові простори	4	2
2	Гільбертові простори та їх властивості	4	3
Змістовий модуль 2. Функціонали і оператори		8	5
3	Неперервні функціонали	4	2
4	Неперервні оператори, їх властивості	4	3
Змістовий модуль 3. Необхідні умови існування екстремумів для задач із фіксованими та рухомими межами		6	5
5	Перша варіація функціоналу. Сильний та слабкий екстремум. Необхідна умова існування екстремуму	2	2
6	Задача Лагранжа та задача Больца. Необхідні умови існування екстремумів. Рівняння Ейлера	4	3
Змістовий модуль 4. Достатні умови існування локальних екстремумів		4	5
7	Друга варіація функціоналів, спряжена задача. Достатні умови існування слабого екстремуму для задачі Лагранжа	4	5
Разом		26	20

Критерії оцінювання самостійної роботи (за 5-бальною шкалою)

- 5 балів – відмінний рівень виконання з можливими незначними недоліками;
- 4 бали – у цілому добрий рівень виконання з незначною кількістю несуттєвих помилок;
- 3 бали – посередній рівень виконання зі значною кількістю недоліків та / або незначною кількістю помилок;
- 2 бали – мінімально можливий допустимий рівень виконання;
- 0 балів – робота не зараховується і потребує повторного виконання або доопрацювання.

6.3. Форми проведення модульного контролю та критерії оцінювання: письмова модульна контрольна робота, яка за сумарною кількістю виконаних завдань оцінюється по 25-ти бальній шкалі.

Кількість балів	<u>Критерії оцінювання</u>
25- 24	Задачі розв'язані правильно; обрано оптимальний метод її розв'язання; наведено повне і правильне розв'язання з належним обґрунтуванням всіх логічних кроків; розв'язок адекватно інтерпретовано в термінах реальної задачі; виклад грамотний.
23-21	Є повне і правильне розв'язання, наявність незначних логічних прогалин в обґрунтуваннях або незначних технічних помилок.
20-18	У цілому правильна ідея, хід розв'язання, наявність незначних логічних помилок або неповнота розв'язання, технічні помилки. Або розв'язано правильно біля 76 - 80% задач.
17-16	Частково правильне розв'язання (містить деякі правильно виконані кроки), наявні помилки або відступі деякі кроки розв'язання. Або розв'язано правильно 70 - 75% задач.
15-14	Є розуміння сутності задачі та методів її розв'язання, але наявні суттєві помилки в розв'язанні (відсутні або неправильні деякі кроки); відсутня інтерпретація розв'язку. Або розв'язано правильно лише 60-69% задач.
13-0	Не володіє навчальним матеріалом, не може застосувати його на практиці, не володіє навичками розв'язання типових практичних задач відповідної теми. Модульна контрольна робота не зараховується і потребує повторної задачі.

6.4. Форми проведення семестрового контролю та критерії оцінювання: екзамен проводиться дистанційно онлайн в режимі відеоконференції засобами Google Meet та з використанням системи Moodle.

Студент дає відповіді на запитання та завдання запропонованого білету. Білет містить 5 питань (завдань) (сумарна кількість балів - 40 балів).

6.5 Шкала відповідності оцінок

Рейтингова оцінка	Оцінка за стобальною шкалою	Значення оцінки
A	90 – 100 балів	Відмінно – відмінний рівень знань (умінь) в межах обов'язкового матеріалу з можливими незначними недоліками
B	82-89 балів	Дуже добре – достатньо високий рівень знань (умінь) в межах обов'язкового матеріалу без суттєвих (грубих) помилок
C	75-81 балів	Добре – в цілому добрий рівень знань (умінь) з незначною кількістю помилок
D	69-74 балів	Задовільно – посередній рівень знань (умінь) із значною кількістю недоліків, достатній для подальшого навчання або професійної діяльності
E	60-68 балів	Достатньо – мінімально можливий допустимий рівень знань (умінь)
FX	35-59 балів	Незадовільно з можливістю повторного складання – незадовільний рівень знань, з можливістю повторного перескладання за умови належного самостійного доопрацювання
F	1-34 балів	Незадовільно з обов'язковим повторним вивченням курсу – досить низький рівень знань (умінь), що вимагає повторного вивчення дисципліни

7. Навчально-методична карта дисципліни

Всього: 120 год., з них лекції – 28 год., практичні заняття – 28 год., модульний контроль – 8 год., самостійна робота – 26 год, семестровий контроль – 30 год.

Модулі (назви, бали)	1. Метричні, банахові та гільбертові простори (78 балів)		2. Функціонали і оператори (78 балів)		3. Необхідні умови існування екстремумів для задач із фіксо- ваними та рухомими межами (78 балів)		4. Достатні умови існування локальних екстремумів (54 бали)
	1	2	3	4	5	6	7
Лекції (теми, бали)	Основні поняття метричних просторів.. Приклади метричних просторів. (2 бали)	Гільбертові простори та їх властивості (2 бали)	Лінійні неперервні функціонали, їх властивості (2 бали)	Лінійні неперервні оператори (2 бали)	Перша варіація функціоналу. Сильний та слабкий екстремум. Необхідна умова існування екстремуму (2 бали)	Задача Лагранжа та задача Больца. Необхідні умови існування екстремумів. Рівняння Ейлера (2 бали)	Друга варіація функціоналів, спряжена задача. Достатні умови існування слабого екстремуму для задачі Лагранжа (2 бали)
Практичні заняття (теми, бали)	Дослідження метричних, банахових та гільбертових просторах. (22 балів)	Дослідження властивостей гільбертових просторів (22 балів)	Вивчення лінійних неперервних функціоналів, знаходження їх норми (22 бали)	Знаходження норми лінійних неперервних операторів (22 бали)	Дослідження варіаційних задач на слабкий екстремум (22 бали)	Розв'язування задач Лагранжа та Больца (22 бали)	Методи побудови розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь з частинними по-хідними першого по-ряду. Вивчення явища blow-up (11 балів) Дослідження проблеми blow-up для інтегровних та збурених інтегровних динамічних систем (22 бали)
Самостійна робота	Самостійна робота (5 балів)		Самостійна робота (5 балів)		Самостійна робота (5 балів)		Самостійна робота (5 балів)
Поточний контроль (вид, бали)	Модульна контрольна робота 1 (25 балів)		Модульна контрольна робота 2 (25 балів)		Модульна контрольна робота 3 (25 балів)		Модульна контрольна робота 4 (25 балів)
Семестровий контроль	Екзамен (40 балів)						
Підсумковий бал	288x0,21+40=100 балів						

8. Рекомендована література

Базова

1. Березанський Ю.М., Ус Г.Ф., Шефтель З. Г. Функціональний аналіз. Курс лекцій. – К.: Вища школа, 1990. – 600 с.
2. Збірник задач з функціонального аналізу. Видання друге, виправлене і доповнене. / Укладачі В. Б. Брайман, О. Ю. Константінов, О. Г. Кукуш, Ю. С. Мішура, О. Н. Нестеренко, А. В. Чайковський. – К.: 2023. – 313 с.
3. Боярищева Т. В., Гудивок Т.В., Погоріляк О.О. Функціональний аналіз. Навчальний посібник для студентів спеціальностей “Математика”, “Прикладна математика”, “Статистика”. – Ужгород, 2013. – 125 с.
4. Моклячук М.П. Варіаційне числення. Екстремальні задачі. Підручник. – К.: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2009. – 380 с.
5. Перестюк М.О., Станжицький О.М., Капустян О.В., Ловейкін Ю.В. Варіаційне числення та методи оптимізації. – К.: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2010. – 121 с.
6. Ващук Ф.Г., Лавер О.Г., Шумило Н.Я. Математичне програмування та елементи варіаційного числення : Навчальний посібник. – К.: Знання, 2008. – 368 с.

Допоміжна

7. Гарасим Я.С., Недашковська А.М., Остудін Б.А. Методи розв’язування типових задач функціонального аналізу: Методичний посібник для студентів. – Львів: Простір М, 2015. – 72 с.
8. Федак І.В. Функціональний аналіз: Навчальний посібник для студентів спеціальностей Інформатика», «Прикладна математика». – Івано-Франківськ: Сімик, 2011. – 120с.