

Київський університет імені Бориса Грінченка
Факультет інформаційних технологій та математики
Кафедра математики і фізики



“ЗАТВЕРДЖУЮ”

Проректор з науково-методичної
та навчальної роботи

Олексій ЖИЛЬЦОВ

2023 р.

**РОБОЧА ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОГО БЛОКУ ДИСЦИПЛІН
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ТА ДИНАМІЧНІ СИСТЕМИ**

для студентів

спеціальності: 111 Математика
освітнього рівня: першого (бакалаврського)
освітньої програми: 111.00.01 Математика

Київ – 2023



1. Опис навчальної дисципліни

Найменування показників	Характеристика дисципліни за формами навчання	
	денна	
Вид дисципліни	Обов'язкова (компонента ОДФ.15)	
Мова викладання, навчання та оцінювання	Українська	
Загальний обсяг кредитів / годин	12/360	
Курс	3	
Семестр	5, 6	
Кількість змістових модулів з розподілом:	5-й семестр	6-й семестр
Обсяг кредитів / годин, в тому числі:	6 / 180	6 / 180
<i>Звичайні диференціальні рівняння</i>	4/120	
Аудиторні	56	
Модульний контроль	8	
Самостійна робота	26	
Семестровий контроль	30 (екзамен)	
<i>Інтегральні рівняння</i>	2/60	
Аудиторні	28	
Модульний контроль	4	
Самостійна робота	28	
Семестровий контроль	залік	
<i>Моделювання динамічних систем</i>		2/60
Аудиторні		28
Модульний контроль		4
Самостійна робота		28
Семестровий контроль		залік
<i>Рівняння математичної фізики</i>		4/120
Аудиторні		56
Модульний контроль		8
Самостійна робота		26
Семестровий контроль		30 (екзамен)

2. Мета та завдання навчальної дисципліни

Робоча навчальна програма з курсу «Диференціальні рівняння та динамічні системи» є нормативним документом Київського університету імені Бориса Грінченка, який розроблено кафедрою математики і фізики на основі освітньо-професійної програми підготовки здобувачів першого (бакалаврського) рівня відповідно до навчального плану спеціальності 111 Математика, освітньої програми 111.00.01 Математика.

Навчальна дисципліна «Диференціальні рівняння та динамічні системи» складається з чотирьох відносно самостійних частин (модулів): Звичайні диференціальні рівняння (4 кредити), Інтегральні рівняння (2 кредити), Моделювання динамічних систем (2 кредити), Рівняння математичної фізики (4 кредити).

Метою дисциплін є фундаментальна підготовка фахівців у галузі математики, спроможних використовувати диференціальні та інтегральні рівняння в математичному моделюванні динамічних систем, розв'язувати комплексні прикладні задачі дослідження та прогнозування реальних процесів.

Завдання навчальної дисципліни полягає у формуванні у студентів знань основних понять і фактів теорії диференціальних та інтегральних рівнянь, динамічних систем; ознайомлення із характерними прикладами їх застосувань, формування навичок математичного моделювання динамічних систем.

Викладання навчальної дисципліни «Диференціальні рівняння та динамічні системи» буде спрямоване на формування таких загальних та спеціальних (фахових) компетентностей:

ЗК-2. Здатність застосовувати знання у практичних ситуаціях.

ЗК-3. Знання й розуміння предметної області та професійної діяльності.

ЗК-4. Здатність спілкуватися державною мовою як усно, так і письмово.

ЗК-7. Здатність учитися і оволодівати сучасними знаннями.

ЗК-8. Здатність до пошуку, обробки та аналізу інформації з різних джерел.

ЗК-9. Здатність приймати обґрунтовані рішення.

ЗК-10. Здатність працювати в команді.

ЗК-11. Здатність спілкуватися з представниками інших професійних груп різного рівня (з експертами з інших галузей знань).

ЗК-12. Здатність працювати автономно.

ЗК-13. Визначеність і наполегливість щодо поставлених завдань і взятих обов'язків.

СК-1. Здатність формулювати проблеми математично та в символічній формі з метою спрощення їхнього аналізу й розв'язання.

СК-2. Здатність подавати математичні міркування та висновки з них у формі, придатній для цільової аудиторії, а також аналізувати та обговорювати математичні міркування інших осіб, залучених до розв'язання тієї самої задачі.

СК-3. Здатність здійснювати міркування та виокремлювати ланцюжки міркувань у математичних доведеннях на базі аксіоматичного підходу, а також розташовувати їх у логічну послідовність, у тому числі відрізняти основні ідеї від деталей і технічних викладок.

СК-4. Здатність конструювати формальні доведення з аксіом та постулатів і відрізняти правдоподібні аргументи від формально бездоганих.

СК-5. Здатність до кількісного мислення.

СК-6. Здатність розробляти і досліджувати математичні моделі явищ, процесів та систем.

СК-8. Здатність до аналізу математичних структур, у тому числі до оцінювання обґрунтованості й ефективності використовуваних математичних підходів.

СК-9. Здатність застосовувати спеціалізовані мови програмування та пакети прикладних програм.

СК-11. Здатність застосовувати математичні факти, теореми, методи й алгоритми, пакети програмного забезпечення до розв'язування прикладних задач із різних сфер життєдіяльності людини й суспільства.

СК-12. Здатність на основі стандартних математичних моделей аналізувати великі об'єми інформації, прогнозувати соціально-економічні процеси, оцінювати стан та перспективи розвитку бізнесу, моделювати процес прийняття рішень та результати їх реалізації.

3. Результати навчання

За підсумками вивчення навчальної дисципліни «Диференціальні рівняння та динамічні системи» студент має оволодіти:

- основними поняттями теорії звичайних диференціальних рівнянь, інтегральних рівнянь, диференціальних рівнянь в частинних похідних та динамічних систем;
- знаннями умов існування та властивостей розв'язків диференціальних та інтегральних рівнянь;
- основними теоремами теорії інтегральних рівнянь Фредгольма та Вольтерри та деякими методами знаходження точних чи наближених їх розв'язків;
- уміннями розв'язувати звичайні диференціальні рівняння першого порядку, що інтегруються в квадратурах, рівняння не розв'язані відносно похідної; лінійні диференціальні рівняння вищих порядків; системи лінійних диференціальних рівнянь;
- уміннями досліджувати стійкість розв'язків систем диференціальних рівнянь першим та другим методами Ляпунова;
- загальними поняттями про диференціальні рівняння в частинних похідних, крайову задачу;

- уміннями знаходити / досліджувати розв'язки окремих типів рівнянь математичної фізики;
- здатністю застосовувати методи математичної фізики для моделювання реальних фізичних, біологічних, екологічних, соціально-економічних та інших процесів і явищ;
- уміннями вирізняти з поміж інших природні, фізичні, економічні та ін. динамічні явища і процеси, для моделювання яких можуть бути використані диференціальні та інтегральні рівняння, здатністю розробляти моделі таких процесів, аналізувати і трактувати розв'язок.

Програмні результати навчання, яких планується досягнути

РН-1. Знати основні етапи історичного розвитку математичних знань і парадигм, розуміти сучасні тенденції в математиці.

РН-3. Знати принципи *modus ponens* (правило виведення логічних висловлювань) та *modus tollens* (доведення від супротивного) і використовувати умови, формулювання, висновки, доведення та наслідки математичних тверджень.

РН-5. Мати навички використання спеціалізованих програмних засобів комп'ютерної та прикладної математики і використовувати інтернет-ресурси.

РН-6. Знати методи математичного моделювання природничих та/або соціальних процесів

РН-7. Пояснювати математичні концепції мовою, зрозумілою для нефахівців у галузі математики.

РН-8. Здійснювати професійну письмову й усну комунікацію українською мовою та однією з іноземних мов.

РН-10. Розв'язувати задачі придатними математичними методами, перевіряти умови виконання математичних тверджень, коректно переносити умови та твердження на нові класи об'єктів, знаходити й аналізувати відповідності між поставленою задачею й відомими моделями

РН-11. Розв'язувати конкретні математичні задачі, які сформульовано у формалізованому вигляді; здійснювати базові перетворення математичних моделей.

РН-16. Знати теоретичні основи і застосовувати методи топології, функціонального аналізу й теорії диференціальних рівнянь для дослідження динамічних систем.

РН-19. Знати теоретичні основи і застосовувати методи математичної фізики для моделювання реальних фізичних, біологічних, екологічних, соціально-економічних та інших процесів і явищ.

РН-21. Розв'язувати типові задачі диференціальних та інтегральних рівнянь.

РН-22. Уміти формалізувати задачі певної предметної галузі, формулювати їх математичну постановку та обирати раціональний метод та алгоритм вирішення.

4. Структура навчальної дисципліни

Назва змістових модулів і тем	Кількість годин (денна форма)				
	Усього	У тому числі			
		Л	П	МК	СР
Модуль 1. ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ (5-й семестр)					
Змістовий модуль 1. Диференціальні рівняння першого порядку					
<i>Тема 1.</i> Диференціальні рівняння: основні поняття	4	2			2
<i>Тема 2.</i> Умови існування і єдиності розв'язку задачі Коші для диференціального рівняння першого порядку.	4	2			2
<i>Тема 3.</i> Диференціальні рівняння першого порядку, які інтегруються в квадратурах	14	4	8		2
<i>Тема 4.</i> Диференціальні рівняння першого порядку, не розв'язані відносно похідної	6	2	2		2
<i>Модульний контроль</i>	2			2	
Разом за змістовим модулем 1	30	10	10	2	8
Змістовий модуль 2. Диференціальні рівняння вищих порядків					
<i>Тема 5.</i> Інтегрування диференціальних рівнянь вищих порядків	12	2	4		6
<i>Модульний контроль</i>	2			2	
Разом за змістовим модулем 3	14	2	4	2	6
Змістовий модуль 3. Лінійні диференціальні рівняння n-го порядку					
<i>Тема 6.</i> Загальна теорія лінійних диференціальних рівнянь n -го порядку	4	2			2
<i>Тема 7.</i> Лінійні однорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами	8	2	4		2
<i>Тема 8.</i> Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами	12	4	6		2
<i>Модульний контроль</i>	2			2	
Разом за змістовим модулем 4	26	8	10	2	6
Змістовий модуль 4. Основи загальної теорії систем диференціальних рівнянь та теорії стійкості					
<i>Тема 9.</i> Системи диференціальних рівнянь	4	2			2
<i>Тема 10.</i> Лінійні системи диференціальних рівнянь	8	2	4		2
<i>Тема 11.</i> Основи теорії стійкості	6	2	2		2
<i>Модульний контроль</i>	2			2	
Разом за змістовим модулем 5	20	6	6	2	6
Екзамен	30				
Усього годин	120	26	30	8	26
Модуль 2. ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ (5-й семестр)					
Змістовий модуль 1. Інтегральні рівняння та задачі, які приводять до них					
<i>Тема 1.</i> Означення та класифікація інтегральних рівнянь	6	2	2		2
<i>Тема 2.</i> Математичні та прикладні задачі, які приводять до інтегральних рівнянь	8	2	2		4

<i>Тема 3.</i> Елементи функціонального аналізу в теорії інтегральних рівнянь	8	2	2		4
<i>Модульний контроль</i>	2			2	
Разом за змістовим модулем 1	24	6	6	2	10
Змістовий модуль 2. Інтегральні рівняння Фредгольма та Вольтерри					
<i>Тема 4.</i> Лінійні інтегральні рівняння. Метод послідовних наближень для рівнянь Фредгольма та Вольтерри	8	2	2		4
<i>Тема 5.</i> Метод ітерованих ядер для рівнянь Фредгольма та Вольтерри	8	2	2		4
<i>Тема 6.</i> Інтегральні рівняння з виродженими ядрами	8	2	2		4
<i>Тема 7.</i> Інтегральні рівняння Фредгольма та Вольтерри першого роду	10	2	2		6
<i>Модульний контроль</i>	2			2	
Разом за змістовим модулем 2	36	8	8	2	18
Усього годин	60	14	14	4	28
Модуль 3. МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ (6-й семестр)					
Змістовий модуль 1. Загальні відомості про динамічні системи					
<i>Тема 1.</i> Основні поняття теорії динамічних систем	6	2	2		2
<i>Тема 2.</i> Динамічні системи на площині. Двовимірні моделі	20	6	6		8
<i>Модульний контроль</i>	2			2	
Разом за змістовим модулем 1	28	8	8	2	10
Змістовий модуль 2. Нелінійні динамічні системи					
<i>Тема 3.</i> Елементи теорії коливань. Найпростіші нелінійні коливання	6	2	2		2
<i>Тема 4.</i> Дослідження нелінійних динамічних систем на площині	12	4	4		4
<i>Тема 5.</i> Консервативні системи з одним ступенем вільності	12	4	4		4
<i>Модульний контроль</i>	2			2	
Разом за змістовим модулем 2	32	10	10	2	10
Усього годин	60	18	18	4	20
Модуль 4. РІВНЯННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ (6-й семестр)					
Змістовий модуль 1. Класифікація і зведення до канонічного вигляду диференціальних рівнянь з частинними похідними другого порядку					
<i>Тема 1.</i> Загальні поняття теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними. Метод характеристик	5	1	2		2
<i>Тема 2.</i> Класифікація диференціальних рівнянь з частинними похідними другого порядку	3	1			2
<i>Тема 3.</i> Зведення до канонічного вигляду рівнянь гіперболічного, параболічного та еліптичного типу	6	2	2		2
<i>Модульний контроль</i>	2			2	
Разом за змістовим модулем 1	16	4	4	2	6
Змістовий модуль 2. Рівняння гіперболічного типу					
<i>Тема 4.</i> Рівняння малих коливань струни	6	2	2		2
<i>Тема 5.</i> Основні крайові задачі в обмежених і напівобмежених областях та їх фізичний зміст	6	2	2		2
<i>Тема 6.</i> Метод відокремлення змінних розв'язування основних крайових задач для рівнянь гіперболічного типу.	6	2	2		2

Модульний контроль	2			2	
Разом за змістовим модулем 2	20	6	6	2	6
Змістовий модуль 3. Рівняння параболічного типу					
Тема 7. Рівняння теплопровідності, його фундаментальний розв'язок і принцип максимуму	8	2	4		2
Тема 8. Основні крайові задачі для рівняння теплопровідності в необмежених і обмежених областях та їх фізичний зміст	8	4	2		2
Тема 9. Метод відокремлення змінних розв'язування основних крайових задач для рівняння теплопровідності	8	2	4		2
Модульний контроль	2			2	
Разом за змістовим модулем 3	26	8	10	2	6
Змістовий модуль 4. Рівняння еліптичного типу					
Тема 10. Фундаментальний розв'язок оператора Лапласа і принцип максимуму для гармонійних функцій. Основні типи крайових задач	12	4	4		4
Тема 11. Задача Діріхле для круга і метод відокремлення змінних	8	2	4		2
Тема 12. Функція Гріна оператора Лапласа	6	2	2		2
Модульний контроль	2			2	
Разом за змістовим модулем 4	28	8	10	2	8
Екзамен	30				
Усього годин	120	26	30	8	26

5. Програма навчальної дисципліни

Модуль 1. ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Змістовий модуль 1.

Диференціальні рівняння першого порядку.

Тема 1. Диференціальні рівняння: основні поняття

✓ Поняття диференціального рівняння, звичайного диференціального рівняння, його розв'язку; інтегральна крива.

✓ Порядок диференціального рівняння.

✓ Диференціальні рівняння та математичне моделювання. Приклади задач, які приводять до диференціальних рівнянь.

✓ Поле напрямів. Ізокліни.

Тема 2. Умови існування і єдиності розв'язку задачі Коші для диференціального рівняння першого порядку.

✓ Загальний та частинний розв'язки диференціального рівняння. Задача Коші. Геометричний зміст початкових умов для диференціальних рівнянь першого та другого порядків.

✓ Теорема існування і єдиності розв'язку задачі Коші для нормального диференціального рівняння 1-го порядку.

✓ Поняття про особливий розв'язок диференціального рівняння.

✓ Ламані Ейлера.

Тема 3. Диференціальні рівняння першого порядку, які інтегруються в квадратурах

✓ Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними та звідні до них.

✓ Однорідні та квазіоднорідні диференціальні рівняння.

✓ Лінійні диференціальні рівняння; рівняння Бернуллі; рівняння Ріккати.

✓ Диференціальні рівняння в повних диференціалах. Інтегрувальний множник.

Тема 4. Диференціальні рівняння першого порядку, не розв'язані відносно похідної

✓ Основні поняття. Теорема про існування та єдність розв'язку задачі Коші.

- / Найпростіші типи диференціальних рівнянь першого порядку, не розв'язаних відносно похідної.
- / Рівняння Лагранжа і Клеро.
- / Особливі розв'язки, умови їх існування. Дискримінантна крива. Обвідна.

Змістовий модуль 2.

Диференціальні рівняння вищих порядків

Тема 5. Інтегрування диференціальних рівнянь вищих порядків

- / Основні поняття: загальний вигляд диференціального рівняння вищих порядків; розв'язок, загальний, частинний розв'язки; початкові умови, задача Коші.
- / Теорема про існування і єдиність розв'язку задачі Коші.
- / Інтегрування та зниження порядку диференціальних рівнянь вищих порядків (диференціальні рівняння вигляду $y^{(n)} = f(x)$, $F(x, y^{(n)}) = 0$, $F(y^{(n-2)}, y^{(n)}) = 0$; рівняння, яке не містить шуканої функції та кількох перших її похідних; рівняння, яке не містить незалежної змінної, шуканої функції та усіх її похідних, крім двох останніх; рівняння, яке не містить незалежної змінної).

Змістовий модуль 3.

Лінійні диференціальні рівняння n -го порядку

Тема 6. Загальна теорія лінійних диференціальних рівнянь n -го порядку

- / Теорема про існування та єдиність розв'язку задачі Коші.
- / Лінійна залежність та незалежність системи функцій, визначник Вронського (вронскіан).
- / Розв'язки лінійного однорідного рівняння, їх властивості.
- / Фундаментальна система розв'язків, її існування.
- / Властивість вронскіана системи розв'язків лінійного однорідного рівняння. Теорема про загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння.
- / Формула Остроградського-Ліувілля.

Тема 7. Лінійні однорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами

- / Характеристичне рівняння.
- / Вигляд частинних розв'язків лінійного однорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами у випадках: а) усі корені характеристичного рівняння прості дійсні; б) серед коренів характеристичного рівняння є комплексно-спряжені; в) характеристичне рівняння має кратні корені.
- / Загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами.

Тема 8. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами

- / Структура загального розв'язку лінійного неоднорідного рівняння.
- / Метод варіації довільних сталих.
- / Лінійне рівняння зі спеціальною (у вигляді квазіполінома) правою частиною. Відшукання частинного розв'язку методом невизначених коефіцієнтів (нерезонансний та резонансний випадки).
- / Математичні моделі на основі лінійних диференціальних рівнянь другого порядку.

Змістовий модуль 4.

Основи загальної теорії систем диференціальних рівнянь та теорії стійкості

Тема 9. Системи диференціальних рівнянь

- ✓ Системи диференціальних рівнянь першого порядку: основні поняття.
- ✓ Загальна теорія лінійних однорідних систем. Поняття про задачу Коші та крайову задачу.
- ✓ Інтегрування нормальних систем методом виключення.

Тема 10. Лінійні системи диференціальних рівнянь

✓ Лінійні однорідні системи диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.
✓ Фундаментальна система розв'язків. Теорема про загальний розв'язок.

✓ Метод Ейлера.
✓ Лінійні неоднорідні системи.

Тема 11. Основи теорії стійкості

✓ Поняття про стійкість розв'язків диференціальних рівнянь. Означення стійкості за Ляпуновим.

✓ Перший та другий методи Ляпунова.
✓ Типи точок спокою.

Модуль 2. ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Змістовий модуль 1.

Інтегральні рівняння та задачі, які приводять до них

Тема 1. Означення та класифікація інтегральних рівнянь

✓ Основні означення і поняття.
✓ Класифікація інтегральних рівнянь.
✓ Зв'язок між інтегральними рівняннями та задачею Коші для звичайних диференціальних рівнянь.

Тема 2. Математичні та прикладні задачі, які приводять до інтегральних рівнянь

✓ Математичні задачі, які приводять до інтегральних рівнянь: задача Коші для звичайного диференціального рівняння першого порядку; задача про відновлення функції за її перетворенням Фур'є.

✓ Фізичні задачі, які приводять до інтегральних рівнянь: задача Абеля; задача про. Малі коливання струни; задача про потенціальну енергію поля тощо.

Тема 3. Елементи функціонального аналізу в теорії інтегральних рівнянь

✓ Метричний простір. Приклади метричних просторів. Повний метричний простір.
✓ Оператор стиску. Стискуюче відображення.
✓ Теорема Банаха про нерухому точку стискуючого відображення.

Змістовий модуль 2.

Інтегральні рівняння Фредгольма та Вольтерри

Тема 4. Лінійні інтегральні рівняння. Метод послідовних наближень для рівнянь Фредгольма та Вольтерри

✓ Рівняння Фредгольма. Метод послідовних наближень для рівняння Фредгольма. Теорема про існування та єдиність розв'язку рівняння Фредгольма другого роду в просторах $C[a;b]$ та $L_2[a;b]$.

✓ Рівняння вольтерри. Метод послідовних наближень для рівняння Вольтерри. Теорема про існування та єдиність розв'язку рівняння Фредгольма в просторі $C[a;b]$.

Тема 5. Метод ітерованих ядер для рівнянь Фредгольма та Вольтерри

✓ Метод ітерованих ядер для рівняння Фредгольма другого роду. Резольвента.
✓ Метод ітерованих ядер для рівняння Вольтерри другого роду. Резольвента.

Тема 6. Інтегральні рівняння з виродженими ядрами

✓ Інтегральне рівняння Фредгольма з виродженим ядром.
✓ Дослідження інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду з виродженими ядрами: перша, друга, третя теореми Фредгольма.

✓ Альтернатива Фредгольма.

Тема 7. Інтегральні рівняння Фредгольма та Вольтерри першого роду

✓ Питання розв'язності інтегрального рівняння Фредгольма першого роду.
✓ Окремі випадки інтегральних рівнянь Вольтерри першого роду

Модуль 3. МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

Змістовий модуль 1.

Загальні відомості про динамічні системи

Тема 1. Основні поняття теорії динамічних систем

- ✓ Передумови виникнення теорії динамічних систем.
- ✓ Види динамічних систем.
- ✓ Динамічні системи, породжені однопараметричними групами перетворень.
- ✓ Класифікація рухів і траєкторій. Нерухомі точки, інваріантні множини.
- ✓ Методи побудови математичних моделей для динамічних процесів. Змінні і параметри в математичних моделях динамічних систем

Тема 2. Динамічні системи на площині. Двовимірні моделі

- ✓ Лінійні динамічні системи та їх властивості. Приклади.
- ✓ Геометрична інтерпретація в системах диференціальних рівнянь. Основні поняття та означення. Стійкість руху.
- ✓ Особливі точки лінійних стаціонарних систем на площині. Вироджені стани рівноваги.

✓

Змістовий модуль 2.

Нелінійні динамічні системи

Тема 3. Елементи теорії коливань. Найпростіші нелінійні коливання

- ✓ Властивості нелінійних коливань. Нелінійний осцилятор.
- ✓ Основні методи аналізу нелінійних коливань.
- ✓ Стійкість періодичних коливань.
- ✓ Нелінійні коливання у фізичних системах.

Тема 4. Дослідження нелінійних динамічних систем на площині

- ✓ Побудування фазових портретів нелінійних систем на площині. Лінеаризація в околі особливої точки.
- ✓ Динамічні системи, що моделюються нелінійними диференціальними рівняннями на площині з поліноміальною правою частиною

Тема 5. Консервативні системи з одним ступенем вільності

- ✓ Малі коливання системи з одним ступенем вільності.
- ✓ Приклади математичних моделей консервативних систем з одним ступенем вільності.

Модуль 4. РІВНЯННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

Змістовий модуль 1.

Класифікація і зведення до канонічного вигляду диференціальних рівнянь з частинними похідними другого порядку.

Тема 1. Загальні поняття теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними. Метод характеристик.

Поняття диференціального рівняння з частинними похідними математичної фізики. Початкові та крайові умови. Поняття про коректність постановки задач математичної фізики за Адамаром. Поняття класичного розв'язку диференціального рівняння з частинними похідними.

Тема 2. Класифікація диференціальних рівнянь з частинними похідними другого порядку.

Квазілінійні диференціальні рівняння з частинними похідними другого порядку. Характеристичне рівняння та характеристики. Типи диференціальних рівнянь з частинними похідними другого порядку: рівняння гіперболічного типу, параболічного типу і еліптичного типу.

Тема 3. Зведення до канонічного вигляду рівнянь гіперболічного, параболічного і еліптичного типу.

Канонічний вигляд рівнянь з частинними похідними. Визначення типу диференціального рівняння з частинними похідними другого порядку. Зведення рівнянь гіперболічного, параболічного і еліптичного типу до канонічного вигляду.

Змістовий модуль 2.

Рівняння гіперболічного типу

Тема 4. Рівняння малих коливань струни.

Задача про малі вільні коливання необмеженої струни. Формула Даламбера. Пряма та обернена хвилі. Метод біжучих хвиль. Вільні коливання напівобмеженої струни. Вимушені коливання необмеженої струни.

Тема 5. Основні крайові задачі в обмежених і напівобмежених областях та їх фізичний зміст.

Постановка основних крайових задач для гіперболічних рівнянь в різних областях. Постановка задачі про коливання струни в середовищі з опором, постановка задачі про коливання прямокутної та круглої мембрани.

Тема 6. Метод відокремлення змінних розв'язування основних крайових задач для рівнянь гіперболічного типу.

Загальна схема методу відокремлення змінних розв'язування крайових задач для рівнянь гіперболічного типу. Задача Штурма-Ліувілля, власні числа і власні функції оператора Штурма-Ліувілля та їх основні властивості. Обґрунтування методу відокремлення змінних.

Змістовий модуль 3.

Рівняння параболічного типу.

Тема 7. Рівняння теплопровідності, його фундаментальний розв'язок і принцип максимуму.

Задача про поширення тепла в необмеженому стержні. Задача Коші для рівняння теплопровідності. Поняття фундаментального розв'язку. Принцип максимуму для рівняння теплопровідності та його застосування для доведення теореми єдиності і неперервної залежності від початкових умов крайових задач для рівняння теплопровідності.

Тема 8. Основні крайові задачі для рівняння теплопровідності в необмежених і обмежених областях та їх фізичний зміст.

Постановка основних крайових задач для рівняння теплопровідності. Задача про поширення тепла в прямокутних та кругових пластинах.

Тема 9. Метод відокремлення змінних розв'язування основних крайових задач для рівняння теплопровідності.

Метод відокремлення змінних для розв'язання крайової задачі про поширення тепла в скінченному стержні у випадку однорідного та неоднорідного рівняння теплопровідності. Метод відокремлення змінних розв'язання задачі про поширення тепла в прямокутній пластині.

Змістовий модуль 4.

Рівняння еліптичного типу.

Тема 10. Фундаментальний розв'язок оператора Лапласа і принцип максимуму для гармонійних функцій. Основні типи крайових задач.

Гармонічні функції і їх властивості. Фундаментальний розв'язок рівняння Лапласа. Принцип максимуму для гармонійних функцій та його застосування. Постановка крайових задач Діріхле і Неймана для рівнянь Лапласа Пуассона.

Тема 11. Задача Діріхле для круга і метод відокремлення змінних.

Постановка задачі Діріхле для круга. Метод відокремлення змінних для крайової задачі для еліптичного рівняння у випадку круга. Рівняння Ейлера.

Тема 12. Функція Гріна оператора Лапласа.

Поняття функції Гріна для крайової задачі для рівняння Лапласа та її властивості. Метод функції Гріна для розв'язання крайових задач для рівняння Лапласа.

6. Контроль навчальних досягнень

6.1. Система оцінювання навчальних досягнень студентів з дисциплін

Модуль 1. ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

№ з/п	Вид діяльності студента	Макс. кількість балів за	Модуль 1		Модуль 2		Модуль 3		Модуль 4	
			Кільк. одиниць	Макс. кількість	Кільк. одиниць	Макс. кількість	Кільк. одиниць	Макс. кількість	Кільк. одиниць	Макс. кількість
1	Відвідування лекцій	1	5	5	1	1	4	4	3	3
2	Відвідування практичних занять	1	5	5	2	2	5	5	3	3
3	Виконання практичних завдань (к-сть балів за модуль як середнє арифметичне всіх отриманих у межах відповідного модуля оцінок)	10	1	10*	1	10*	1	10*	1	10*
4	Виконання модульної контрольної роботи	25	1	25	1	25	1	25	1	25
	Разом	168		45		38		44		41
	Максимальна кількість балів:	60 (іспит – 40 балів)								
	Розрахунок коефіцієнта	60/168 = 0,36								

Модуль 2. ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ

№ з/п	Вид діяльності студента	Макс. кількість балів за одиницю	Модуль 1		Модуль 2	
			Кільк. одиниць до розрахунку	Макс. кількість балів за вид	Кільк. одиниць до розрахунку	Макс. кількість балів за вид
1	Відвідування лекцій	1	3	3	4	4
2	Відвідування практичних занять	1	3	3	4	4
3	Виконання практичних завдань (к-сть балів за модуль як середнє арифметичне всіх отриманих у межах відповідного модуля оцінок)	10	1	10*	1	10*
4	Виконання модульної контрольної роботи	25	1	25	1	25
	Разом	84		41		43
	Максимальна кількість балів:	100				
	Розрахунок коефіцієнта	100/84 = 1,19				

Модуль 3. МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

№ з/п	Вид діяльності студента	Макс. кількість балів за одиницю	Модуль 1		Модуль 2	
			Кільк. одиниць до розрахунку	Макс. кількість балів за вид	Кільк. одиниць до розрахунку	Макс. кількість балів за вид
1	Відвідування лекцій	1	4	4	5	5
2	Відвідування практичних занять	1	4	4	5	5
3	Виконання практичних завдань (к-сть балів за модуль як середнє арифметичне всіх отриманих у межах відповідного модуля оцінок)	10	1	10*	1	10*
4	Виконання модульної контрольної роботи	25	1	25	1	25
	Разом	88		43		45
	Максимальна кількість балів:	100				
	Розрахунок коефіцієнта	100/88 = 1,14				

Модуль 4. РІВНЯННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

№ з/п	Вид діяльності студента	Макс. кількість балів за	Модуль 1		Модуль 2		Модуль 3		Модуль 4	
			Кільк. одиниць	Макс. кількість	Кільк. одиниць	Макс. кількість	Кільк. одиниць	Макс. кількість	Кільк. одиниць	Макс. кількість
1	Відвідування лекцій	1	2	2	3	3	4	4	4	4
2	Відвідування практичних занять	1	2	2	3	3	5	5	5	5
3	Виконання практичних завдань (к-сть балів за модуль як середнє арифметичне всіх отриманих у межах відповідного модуля оцінок)	10	1	10*	1	10*	1	10*	1	10*
4	Виконання модульної контрольної роботи	25	1	25	1	25	1	25	1	25
	Разом	168		39		41		44		44
	Максимальна кількість балів:	60 (іспит – 40 балів)								
	Розрахунок коефіцієнта	60/168 = 0,36								

* За кожний змістовий модуль студент може отримати максимально 10 балів і це число балів є середнім арифметичним (округленим до цілого) балів, отриманих за виконанні практичні завдання даного змістового модуля. Якщо цей середній арифметичний показник менший, ніж 6 балів, студент має відповідні теми модуля опрацювати і в індивідуальному порядку здати викладачу; іншими видами робіт бали не компенсуються.

Критерії оцінювання за 10-бальною шкалою

Кількість балів	Значення оцінки (характеристика відповіді)
10	Відмінний рівень знань (умінь), відповідь повна, вичерпна й достатньо обґрунтована з, можливими, незначними недоліками
9	Достатньо високий рівень знань (умінь), відповідь без суттєвих (грубих) помилок, але не містить повних обґрунтувань
8	В цілому добрий рівень знань (умінь), відповідь (розв'язання) містить незначну кількість несуттєвих помилок
7	Посередній рівень знань (умінь), відповідь (розв'язання) містить багато недоліків та / або незначну кількість помилок
5–6	Мінімально допустимий рівень знань (умінь), що характеризується недостатньою обґрунтованістю, фрагментарністю; відповідь (розв'язання) неповна, містить недоліки та помилки
3–4	Незадовільний рівень знань (умінь), що виявляється у формальному запам'ятанні деяких понять і фактів, без належного їх розуміння, нездатності застосувати такі знання при розв'язанні задач.
1–2	Незадовільний рівень знань (умінь), що виявляється у неспроможності відтворити означення понять та формулювання теорем, невмінні розв'язувати задачі або відповідь взагалі відсутня.

6.2 Самостійна робота з дисциплін

«ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ» і «РІВНЯННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ»

№ з/п	Назва теми або завдання	Кількість годин
1.	Вивчення лекційного матеріалу та рекомендованої літератури (підготовка до практичних занять)	8
2.	Виконання практичних домашніх завдань	10
3.	Підготовка до модульних контрольних робіт	8
4.	Підготовка до екзамену	30
	Разом	56

«ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ»

№ з/п	Назва теми або завдання	Кількість годин
1.	Вивчення лекційного матеріалу та рекомендованої літератури (підготовка до практичних занять)	10
2.	Виконання практичних домашніх завдань	10
3.	Підготовка до модульних контрольних робіт	8
	Разом	28

«МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ»

№ з/п	Назва теми або завдання	Кількість годин
1.	Вивчення лекційного матеріалу та рекомендованої літератури (підготовка до практичних занять)	5
2.	Виконання практичних домашніх завдань	10
3.	Підготовка до модульних контрольних робіт	5
	Разом	20

6.3. Форми проведення модульного контролю та критерії оцінювання: письмова модульна контрольна робота, яка за сумарною кількістю виконаних завдань оцінюється по 25-ти бальній шкалі.

Кількість балів	<u>Критерії оцінювання</u>
25- 24	Задачі розв'язані правильно; обрано оптимальний метод її розв'язання; наведено повне і правильне розв'язання з належним обґрунтуванням всіх логічних кроків; розв'язок адекватно інтерпретовано в термінах реальної задачі; виклад грамотний.
23-21	Є повне і правильне розв'язання, наявність незначних логічних прогалів в обґрунтуваннях або незначних технічних помилок.
20-18	У цілому правильна ідея, хід розв'язання, наявність незначних логічних помилок або неповнота розв'язання, технічні помилки. Або розв'язано правильно біля 76 - 80% задач.
17-16	Частково правильне розв'язання (містить деякі правильно виконані кроки), наявні помилки або відступи деякі кроки розв'язання. Або розв'язано правильно 70 - 75% задач.
15-14	Є розуміння сутності задачі та методів її розв'язання, але наявні суттєві помилки в розв'язанні (відсутні або неправильні деякі кроки); відсутня інтерпретація розв'язку. Або розв'язано правильно лише 60-69% задач.
13-0	Не володіє навчальним матеріалом, не може застосувати його на практиці, не володіє навичками розв'язання типових практичних задач відповідної теми. Модульна контрольна робота не зараховується і потребує повторної задачі.

6.4. Форми проведення семестрового контролю та критерії оцінювання: екзамен проводиться в університетській аудиторії у тестовій формі із використанням персональних комп'ютерів, якщо ситуація дозволяє проведення освітнього процесу офлайн. Якщо ж освітній процес проходить дистанційно, то екзамен проводиться онлайн в режимі відеоконференції засобами Google Meet та з використанням системи Moodle.

Студент дає відповіді на запитання та завдання запропонованого тесту. Тест містить 20 питань (завдань), які передбачають автоматичну (комп'ютерну) перевірку і оцінюються по 2 бали за кожну правильну відповідь (сумарна кількість балів - 40 балів).

6.5. Шкала відповідності оцінок

Рейтингова оцінка	Оцінка за стобальною шкалою	Значення оцінки
A	90 – 100 балів	Відмінно – відмінний рівень знань (умінь) в межах обов’язкового матеріалу з можливими незначними недоліками
B	82-89 балів	Дуже добре – достатньо високий рівень знань (умінь) в межах обов’язкового матеріалу без суттєвих (грубих) помилок
C	75-81 балів	Добре – в цілому добрий рівень знань (умінь) з незначною кількістю помилок
D	69-74 балів	Задовільно – посередній рівень знань (умінь) із значною кількістю недоліків, достатній для подальшого навчання або професійної діяльності
E	60-68 балів	Достатньо – мінімально можливий допустимий рівень знань (умінь)
FX	35-59 балів	Незадовільно з можливістю повторного складання – незадовільний рівень знань, з можливістю повторного перескладання за умови належного самостійного доопрацювання
F	1-34 балів	Незадовільно з обов’язковим повторним вивченням курсу – досить низький рівень знань (умінь), що вимагає повторного вивчення дисципліни

7. НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНА КАРТА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

Модуль 1. ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Всього: 120 год., з них лекції – 26 год., практичні заняття – 30 год., модульний контроль – 8 год., самостійна робота – 26 год., семестровий контроль – 30 год. (екзамен)

Змістовий модуль	ЗМ 1					ЗМ 2		ЗМ 3				ЗМ 4						
Назва ЗМ	Диференціальні рівняння першого порядку					Диференціальні рівняння вищих порядків		Лінійні диференціальні рівняння n -го порядку				Основи загальної теорії систем диференціальних рівнянь та теорії стійкості						
Лекції (№)	1, 2		3	4	5	6		7	8	9	10	11	12	13				
Пр. зан. (№)	1, 2		3	4	5	6	7	8	9	10, 11	12	13	14	15				
Теми лекцій	Диф. р-ня: осн. поняття. Задачі, які приводять до диф. р-нь Задача Коші для диф. р-ня I порядку. Теор. існув. та єд. р-ку		Диф. р-ня з відокр. зм. Однорідні диф. р-ня та звідні до них	Лінійні диф. р-ня. Р-ня Бернуллі. Р-ня у повних диференціалах	Диф. р-ня I порядку, не розв'язані відн. похідної: осн. поняття, види рівнянь		Диф. р-ня вищих порядків: осн. поняття. Теор. про існув. і єдиність р-ку.	Класи диф. р-нь, що допускають зниз. порядку		Загальна теорія лінійних рівнянь n -го порядку	В Лінійні однорідні рівняння зі сталими коефіцієнтами	Лін. неоднорідні р-ня. Метод варіації дов. сталих. Метод невизначених коефіцієнтів	Матем. моделі на основі лін. диф. р-нь II порядку		Системи диф. р-нь I пор.: основні поняття. Загальна теорія лін. однорідн. систем	Лінійні однорідні системи диф. р-нь зі сталими коеф. Фундаментальна система р-ків. Метод Ейлера.	Лін. неоднорідні системи	Стійкість р-ків диф. р-нь за Ляпуновим. Перший та другий методи Ляпунова. Типи точ. спокою.
Теми практичних занять	Диф. р-ня з відокр. зм. Однорідні диф. р-ня. Р-ня, що зводяться до однорідних.		Лінійні диф. р-ня. Р-ня Бернуллі.	Диф. р-ня в повних диф. Інтегровальний множник	Р-ня першого пор., не розв. відносно похідної.		Інтегрування та зниз. порядку диф. р-нь вищих порядків.	Інтегрування та зниз. порядку диф. р-нь вищих порядків.		Лін. диф. р-ня n -го порядку, власт р-ків.	Лін. однорідні р-ня n -го порядку зі сталими коеф.	Лін. неоднорідні р-ня n -го порядку зі сталими коеф. та спец. правотою частиною.	Прикладні задачі, що зводяться до лін. диф. р-нь II порядку	Лінійні сист. диф.	р-нь. ФСР. Метод Ейлера	Дослідження стійкості р-ків методами Ляпунова		
Відвідув. занять	10			10		3		9				6						
Викон. пр. завдань	10			10		10		10				10						
Модульн. контр.	25			25		25		25				25						
Екзамен	40																	
Підсумковий бал	168x0,36+40=100 балів																	

Модуль 2. ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Всього: 60 год., з них лекції – 14 год., практичні заняття – 14 год., модульний контроль – 4 год., самостійна робота – 28 год., семестровий контроль – залік

Модуль 3. МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

Всього: 60 год., з них лекції – 18 год., практичні заняття – 18 год., модульний контроль – 4 год., самостійна робота – 20 год., семестровий контроль – залік

Дисципліна	ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ							МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ					
	ЗМ 1			ЗМ 2				ЗМ 1			ЗМ 2		
Назва ЗМ	Інтегральні рівняння та задачі, які приводять до них			Інтегральні рівняння Фредгольма та Вольтерри				Загальні відомості про динамічні системи			Нелінійні динамічні системи		
Лекції (№)	1	2	3	4	5	6	7	1	2	3, 4	5	6, 7	8, 9
Пр. зан. (№)	1	2	3	4	5	6	7	1	2	3, 4	5	6, 7	8, 9
Теми лекцій	Означення та класифікація інтегральних рівнянь	Математичні та прикладні задачі, які приводять до інтегральних рівнянь	Елементи функціонального аналізу в теорії інтегральних рівнянь	Лінійні інтегральні рівняння. Метод послідовних наближень для рівнянь Фредгольма та Вольтерри	Метод ітерованих ядер для рівнянь Фредгольма та Вольтерри	Інтегральні рівняння з вивірженими ядрами	Інтегральні рівняння Фредгольма та Вольтерри першого роду	Основні поняття теорії динамічних систем	Динамічні системи на площині.	Двовимірні моделі	Елементи теорії коливань. Найпростіші нелінійні коливання	Дослідження нелінійних динамічних систем на площині	Консервативні системи з одним ступенем вільності
Теми практичних занять	Означення та класифікація інтегральних рівнянь	Математичні та прикладні задачі, які приводять до інтегральних рівнянь	Елементи функціонального аналізу в теорії інтегральних рівнянь	Метод послідовних наближень для рівнянь Фредгольма та Вольтерри	Метод ітерованих ядер для рівнянь Ф-ма та Вольтерри	Інтегральні рівняння з вивірженими ядрами	Інтегральні рівняння Ф-ма та Вольтерри першого роду	Основні поняття теорії динамічних систем	Динамічні системи на площині.	Двовимірні моделі	Елементи теорії коливань. Найпростіші нелінійні коливання	Дослідження нелінійних динамічних систем на площині	Консервативні системи з одним ступенем вільності
Відвідув. занять	6			8				8			10		
Викон. пр. завдань	10			10				10			10		
Модульн. контр.	25			25				25			25		
Підсумковий бал	84x1,19=100 балів							88x1,14=100 балів					

Модуль 4. РІВНЯННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

Всього: 120 год., з них лекції – 26 год., практичні заняття – 30 год., модульний контроль – 8 год., самостійна робота – 26 год., семестровий контроль – 30 год. (екзамен)

Зм. модуль	ЗМ 1		ЗМ 2			ЗМ 3			ЗМ 4			
Назва ЗМ	Класифікація і зведення до канонічного вигляду диференціальних рівнянь з частинними похідними другого порядку		Рівняння гіперболічного типу			Рівняння параболічного типу			Рівняння еліптичного типу			
Лекції (№)	1	2	3	4	5	6	7, 8	9	10, 11	12	13	
Пр. зан. (№)	1	2	3	4	5	6, 7	8	9, 10	11, 12	13, 14	15	
Теми лекцій	Загальні поняття теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними. Метод характеристик	Класифікація диференціальних рівнянь з частинними похідними другого порядку	Зведення до канонічного вигляду рівнянь гіперболічного, параболічного та еліптичного типу	Рівняння малих коливань струни	Основні крайові задачі в обмежених і напівобмежених областях та їх фізичний зміст	Метод відокремлення змінних розв'язування основних крайових задач для рівнянь гіперболічного типу	Рівняння теплопровідності, його фундаментальний розв'язок і принцип максимуму	Крайові задачі для рівняння теплопровідності та їх фізичний зміст	Метод відокремлення змінних розв'язування крайових задач для рівняння теплопровідності	Фундаментальний розв'язок оператора Лапласа і принципи максимуму для гармонійних функцій.	Задача Діріхле для круга і метод відокремлення змінних	Функція Гріна оператора Лапласа
Теми практичних занять	Загальні поняття теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними. Метод характеристик	Зведення до канонічного вигляду рівнянь гіперболічного, параболічного та еліптичного типу	Рівняння малих коливань струни	Основні крайові задачі в обмежених і напівобмежених областях	Метод відокремлення змінних розв'язування основних крайових задач	Рівняння теплопровідності, його фундаментальний розв'язок	Основні крайові задачі для рівняння теплопровідності	Метод відокремлення змінних розв'язування основних крайових задач	Основні типи крайових задач	Задача Діріхле для круга і метод відокремлення змінних	Функція Гріна оператора Лапласа	
Відвідув. занять	4		6			9			9			
Викон. пр. завдань	10		10			10			10			
Модульн. контр.	25		25			25			25			
Екзамен	40											
Підсумковий бал	168x0,36+40=100 балів											

8. Рекомендована література

1. Вища математика: готуємось до атестації. Ч. I. Теоретичні матеріали: навчальний посібник / Астаф'єва М.М. та ін.; за заг. ред. М. Астаф'євої. Київ : КУБГ, 2021. 176 с.
2. Дюженкова Л.І., Дюженкова О.Ю., Михалін Г.О. Вища математика: Приклади і задачі. Київ : «Академія». 2002. 546 с.
3. Каленюк П.І., Рудавський Ю.К., Тацій Р.М. та ін. Диференціальні рівняння. Львів : Львівська політехніка, 2014. 380 с.
4. Кривошея С.А., Перестюк М.О., Бурим В.М. Диференціальні та інтегральні рівняння. – К.: Либідь, 2004.- 408 с.
5. Математичний аналіз у задачах і прикладах: У 2-х ч. Ч. 2.: Навчальний посібник для студентів вузів / Л.І. Дюженкова та ін. Київ : Вища школа, 2003. 470 с.
6. Перестюк М.О., Маринець В.В. Теорія рівнянь математичної фізики. – К.: Либідь, 1993. – 334 с.
7. Самойленко А.М., Борисенко С.Д., Матараццо Дж. та ін. Диференціальні моделі. Стійкість. К., 2000.
8. Самойленко В.Г., Конет І.М. Рівняння математичної фізики. К.: ВПЦ “Київський університет”, 2014. – 284 с.
9. Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк М.О. Диференціальні рівняння. Приклади і задачі. Київ : Наукова думка, 2004. 504 с.
10. Самойленко А.М., Перестюк М.О., Парасюк І.О. Диференціальні рівняння. Київ : Либідь, 2003. 600 с.
11. Хусаїнов Д.Я., Харченко І.І., Шатирко А.В., Введення в моделювання динамічних систем: Навч. посібник. К.: ВПЦ “Київський університет”, 2010. 130 с.
12. Шкіль М.І., Колесник Т.В. Вища математика. Книга 2. Київ : Либідь, 2010. 496 с.
13. Шкіль М.І., Лейфура В.М., Самусенко П.Ф. Диференціальні рівняння. Київ : Техніка, 2003. 368 с.